

A III - 9  
S. 2/63  
D157

Zum Energietransport in einem nichtlinearen  
räumlich inhomogenen Seegangsfeld




Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Christian-Albrechts-Universität  
zu Kiel

Vorgelegt von  
Jürgen Willebrand

Kiel  
1973



Referent: Prof. Dr. L. Magaard

Korreferent:

Tag der mündlichen Prüfung:

Zum Druck genehmigt: Kiel, den

.....

Dekan

## Inhaltsverzeichnis

	<u>Seite</u>
1. Einleitung	1
2. Die Whitham'sche Theorie	5
3. Anwendung der Whitham'schen Theorie auf Wasserwellen in Euler'schen Koordinaten	14
4. Beziehung zwischen der Fortpflanzungs- geschwindigkeit aus (2.16) und der Gruppengeschwindigkeit	28
5. Die Transportgleichung für das Seegangs- spektrum in kontinuierlicher Darstellung	32
6. Numerische Auswertung der in der Trans- portgleichung vorkommenden Integral- ausdrücke	42
7. Zusammenfassung	48
Anhang	50
Literaturverzeichnis	52
Erläuterungen zu den Abbildungen	55

## 1. Einleitung

Die Entstehung und Ausbreitung des Seeganges an der Meeresoberfläche ist in den letzten Jahren ausführlich untersucht worden. Die neuere Entwicklung wurde eingeleitet durch Arbeiten von MILES (1957) und PHILLIPS (1957), in denen die Wellenerzeugung durch Wind bzw. Luftdruckschwankungen studiert wurde. Diese Modelle beschreiben das Anwachsen der Wellen qualitativ zufriedenstellend. Spätere Messungen (SNYDER & COX, 1966, BARNETT & WILKERSON, 1967) zeigten jedoch, daß quantitative Übereinstimmung fehlt; die tatsächlichen Wachstumsraten des Seeganges im Ozean sind erheblich höher als die von der Miles'schen Theorie vorhergesagten.

Das Anwachsen der Seegangsenergie an einem Punkt der Meeresoberfläche kann prinzipiell zwei verschiedene Ursachen haben:

- 1) Direkte Wellenerzeugung durch äußere Kräfte
- 2) Indirekte Zufuhr (schon vorher erzeugter) Energie aus anderen Orts- oder Wellenzahlbereichen.

Während in den erwähnten Arbeiten von Miles und Phillips direkte Erzeugungsmechanismen betrachtet werden, hat HASSELMANN (1962) den Energietransport durch nichtlineare Wechselwirkungen im Wellenfeld berechnet. Bei einer experimentellen Untersuchung, die 1969 in der Nordsee durchgeführt wurde, ergab sich, daß dieser Energiefluß für einen wesentlichen Teil des beobachteten Wellenwachstums verantwortlich ist (HASSELMANN et al., 1973). Das bedeutet, daß die Eigenschaften eines sich frei ausbreitenden Wellenfeldes auch für Fragen der Seegangsentsstehung von großer Bedeutung sind. Daher scheint es sinnvoll zu versuchen, diese Eigenschaften so genau wie möglich verstehen zu lernen.

Die mathematische Beschreibung des Seegangsfeldes stößt auf einige in der Ozeanographie geläufige Schwierigkeiten. Die Bewegungsgleichungen der Oberflächenwellen sind nichtlinear, sie haben auch gewöhnlich keine (in Ort und Zeit) konstanten Koeffizienten (z.B. Wassertiefe, mittlere Strömung, meteorologische Felder). Infolge ihrer Nichtlinearität sind außerdem die Gleichungen statistisch nicht abgeschlossen, so daß man nicht ohne zusätzliche Annahmen über die stochastischen Eigenschaften des Wellenfeldes auskommt. Analytische Lösungen sind daher nur für seltene Ausnahmefälle bekannt. Dagegen sind die Lösungen linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten auf einfache Weise zu erhalten. Sie lassen sich darüber hinaus physikalisch anschaulich als Überlagerung ebener, harmonischer Wellen deuten; im Sinne der Statistik beschreiben sie in der Regel einen zeitlich stationären und räumlich homogenen Vorgang. Es ist daher sowohl vom physikalischen wie auch vom mathematischen Standpunkt aus naheliegend, von dieser einfachen Vorstellung auszugehen und den Einfluß großer Wellenamplituden sowie variabler Koeffizienten auf den Energietransport nur schrittweise zu berücksichtigen.

Solche Rechnungen sind in zahlreichen Arbeiten durchgeführt worden. Die meisten Autoren behandeln dabei einzelne der erwähnten Aspekte. So untersuchten z.B. LONGUET-HIGGINS und STEWART (1961, 1962) den Einfluß zeit- und ortsvariabler Strömungen auf ein Wellenfeld, das im wesentlichen als linear angenommen wurde. In der nichtlinearen Wechselwirkungstheorie von HASSELMANN (1962) wird räumliche Homogenität vorausgesetzt. WHITHAM (1962, 1967) beschränkt sich bei seinen Untersuchungen über nichtlineare Wellenausbreitung auf Einzelwellen von nahezu konstanter Form.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, im Rahmen der oben erwähnten Näherungen eine systematische Berechnung des Energieflusses in einem Seegangsfeld durchzuführen. Dabei interessieren also besonders diejenigen Änderungen gegenüber der Energieausbreitung in einem linearen Wellenfeld, die eine Folge der gleichzeitigen Berücksichtigung beider Aspekte, der Nichtlinearität und Nichthomogenität, sind.

Das mathematische Vorgehen besteht im Prinzip aus einer Störungsrechnung nach zwei kleinen Parametern, welche die Abweichungen in beide Richtungen messen. Eine solche Entwicklung kann mit ähnlichen Methoden durchgeführt werden, wie sie von Bogoljubov und Krylov zur Behandlung nichtlinearer Schwingungen entwickelt wurden (s.z.B. BOGOLJUBOV und MITROPOLSKI, 1965). Hierbei werden die Ausgangsgleichungen (in unserem Falle also die hydrodynamischen Bewegungsgleichungen für ein reibungsfreies Medium) in geeigneter Weise nach beiden Parametern entwickelt. Eine solche Entwicklung wäre jedoch, gerade bei den algebraisch ohnehin recht komplizierten Wasserwellengleichungen, sehr unübersichtlich. Nun lassen sich aber diese Gleichungen, wie die meisten Bewegungsgleichungen der Physik, auch mit Hilfe eines Variationsprinzips formulieren. Man kann daher auch so vorgehen, daß man zunächst die zur Störungsrechnung erforderlichen Schritte an der entsprechenden Lagrange-Funktion vornimmt und erst anschließend die Variationsgleichungen aufstellt. Dabei kommt man natürlich zu den gleichen Ergebnissen, aber möglicherweise auf kürzerem und leichter verständlichem Wege.

Diese Idee wurde von WHITHAM (1965a,b) in die Form einer geschlossenen Theorie gebracht, die auf verschiedenartigste Probleme der Wellenausbreitung angewandt werden kann. Die Whitham'sche Methode wird auch in dieser Arbeit

benutzt. Für die Anwendung auf ein stochastisches Wellenfeld wurde sie zunächst etwas verallgemeinert, da sie in ihrer ursprünglichen Form nur zur Behandlung einzelner Wellenzüge geeignet ist. Sie wird im folgenden Abschnitt eingehend dargestellt.

Anschließend wird, ausgehend von den Bewegungsgleichungen für reibungs- und wirbelfreie Wasserwellen, eine Transportgleichung für die spektrale Energiedichte des Wellenfeldes hergeleitet. Diese Gleichung ist (vereinfacht) von der Form

$$(1.1) \quad \frac{\partial E}{\partial t} + \underline{v} \cdot \frac{\partial E}{\partial \underline{x}} = S(\underline{k}, \underline{x}, t)$$

wobei  $E(\underline{k}, \underline{x}, t)$  die spektrale Energiedichte pro Oberflächeneinheit als Funktion von horizontaler Wellenzahl, Ort und Zeit und  $\underline{v}$  die Gruppengeschwindigkeit darstellt. Die Quellfunktion  $S$ , die spektrale Energiezunahme bzw. -abnahme pro Zeiteinheit, enthält z.B. die (hier nicht weiter betrachtete) Erzeugung von Wellenenergie durch äußere Kräfte sowie Dissipation, aber auch den Einfluß der Wechselwirkungen von Wellen untereinander und mit der mittleren Strömung. Es wird nun untersucht, welche Änderungen sich an Gl. (1.1) durch die gleichzeitige Berücksichtigung von Nichtlinearität und Nichthomogenität des Wellenfeldes ergeben, und welche physikalische Bedeutung diesen Änderungen zukommt.

In einem weiteren Abschnitt werden die interessierenden nichtlinearen Terme der Transportgleichung für zwei als typisch anzusehende Fälle numerisch ausgerechnet. Dabei zeigt sich, daß im tiefen Wasser die relative Änderung gegenüber der linearen Transportgleichung gering ist; sie liegt in der Größenordnung der heute üblichen Meßgenauigkeit. Im Flachwasserbeispiel dagegen sind die Änderungen



zum Teil beträchtlich, sie dürfen gegenüber den linearen Termen nicht ohne weiteres vernachlässigt werden. Es ist allerdings zu beachten, daß für die Seegangsausbreitung im Flachwasser Vorgänge wie Brandung und turbulente Bodenreibung, die bislang nicht vollständig aufgeklärt sind, eine große Rolle spielen; ihre weitere Untersuchung ist daher eine vordringliche Aufgabe der Seegangsforschung.

## 2. Die Whitham'sche Theorie

Der Grundgedanke der Whitham'schen Theorie ist es, zur Lösung nichtlinearer Differentialgleichungen, die Wellenausbreitungsvorgänge beschreiben, ein systematisches Näherungsverfahren aufzustellen, das im Ergebnis analog zu der WKBJ-Methode bei linearen Gleichungen ist. Das entspricht also etwa dem Übergang zur geometrischen Optik in der Elektrodynamik, oder allgemein dem Übergang zur Strahlenmethode bei Wellenerscheinungen. Während die ursprüngliche Begründung des Formalismus durch WHITHAM (1965b) mehr oder weniger intuitiv war, ist seither auf verschiedene Weise gezeigt worden (LUKE 1967, BISSHOP & WILSON 1968, BRETHERTON 1968, HAYES 1970), daß seine Resultate als 1. Näherung einer asymptotischen Entwicklung nach einem kleinen Parameter, welcher etwa das Verhältnis zwischen typischer Wellenlänge und großräumiger Skala darstellt, erhalten werden können.

Im folgenden wird das wichtigste Ergebnis der Whitham'schen Theorie, die Erhaltungsgleichung für die Wirkungs-dichte, hergeleitet. Als Erweiterung wird dabei zugelassen, daß die Lösung einem Wellenfeld und nicht nur



einem einzelnen Wellenzug entspricht; dies ist für die spätere Anwendung auf das Seegangsproblem notwendig. Dagegen soll zunächst einschränkend angenommen werden, daß die gesuchte Lösung hinsichtlich aller Ortskoordinaten eine Wellenbewegung beschreibt. Dies trifft für Wellen im Meer, bei denen die vertikale Koordinate meist gesondert von den horizontalen behandelt werden muß, nicht zu. Jedoch vereinfacht diese Annahme die folgende Herleitung sehr, und die Erweiterung auf das Problem der Wasserwellen läßt sich zumindest leicht plausibel machen. Für eine strenge Behandlung dieses Falles wird auf die oben zitierten Arbeiten verwiesen.

Es sei  $\varphi(\underline{x}, t)$  die gesuchte Funktion, welche Schwankungen einer physikalischen Größe um ihren Mittelwert in Ort und Zeit beschreibt. Der Mittelwert darf ebenfalls orts- und zeitabhängig, jedoch gegenüber  $\varphi(\underline{x}, t)$  nur langsam veränderlich sein. Die Bewegungsgleichungen für  $\varphi(\underline{x}, t)$  mögen in Form eines Variationsprinzips vorliegen:

$$(2.1) \quad \delta \int L(\varphi_t, \varphi_{\underline{x}}, \varphi) d\underline{x} dt = 0$$

wobei  $\varphi_t, \varphi_{\underline{x}}$  die Ableitungen nach den entsprechenden Größen bedeuten. Das Integral ist über ein beliebiges festes Gebiet im  $\underline{x}$ -t-Raum zu erstrecken. Der mittlere Zustand soll bereits in die Definition der Lagrange-Funktion  $L(\varphi_t, \varphi_{\underline{x}}, \varphi)$  eingeschlossen sein.

Die Verallgemeinerung von (2.1) auf den Fall, daß  $\varphi(\underline{x}, t)$  aus mehreren Komponenten besteht (z.B. Wasserwellen aus Oberflächenauslenkung und Geschwindigkeit), ist leicht, wird aber der einfacheren Notation wegen nicht explizit vorgenommen.

(2.1) ist gleichwertig mit der Bewegungsgleichung

$$(2.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} L_{f_t} + \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot L_{f_x} - L_f = 0$$

Es werden nun solche Lösungen von (2.2) gesucht, die sich als Gemisch von Wellen verschiedener Wellenlänge und -periode interpretieren lassen. Dazu wird angesetzt

$$(2.3) \quad \varphi(\underline{x}, t) = f(s_1, \dots, s_N, \underline{x}, t)$$

wobei die Funktionen  $s_n = s_n(\underline{x}, t)$ ,  $n=1, \dots, N$ , zunächst nicht spezifiziert werden. Die  $s_n$  sowie ihre Ableitungen

$$(2.4) \quad \omega_n = - \frac{\partial s_n}{\partial t}, \quad \underline{k}_n = \frac{\partial s_n}{\partial \underline{x}}$$

werden als Phasen, Frequenzen und Wellenzahlen bezeichnet. Die Idee hierbei ist, daß man die explizite Abhängigkeit der Funktion  $f(s_1, \dots, s_N, \underline{x}, t)$  von  $\underline{x}$  und  $t$  als schwach gegenüber der indirekten über die Phasen  $s_n(\underline{x}, t)$  ansehen will; erst dann werden diese Namen sinnvoll. Von dieser Annahme wird später explizit Gebrauch gemacht.

Für  $N=1$  erhält man die übliche Whitham'sche Theorie. Wir werden demgegenüber (beim Übergang zur kontinuierlichen Schreibweise) annehmen, daß  $N$  eine sehr große Zahl ist.

Geht man mit (2.3) und (2.4) in (2.2) ein, erhält man

$$(2.5) \quad \frac{\partial}{\partial t} L_{f_t} + \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot L_{f_x} + \sum_n \frac{\partial}{\partial s_n} L_{f_{s_n}} - L_f = 0$$

mit

$$L = L(f_t - \sum_n \omega_n f_{s_n}, f_x + \sum_n \underline{k}_n f_{s_n}, f)$$

Mit  $\partial/\partial t$ ,  $\partial/\partial \underline{x}$  sind von jetzt an immer die Ableitungen bei festgehaltenen Phasen gemeint.

Es wird nun gefordert, daß die Funktion  $f(s_1, \dots, s_N, \underline{x}, t)$  in den Variablen  $s_n$  periodisch mit der Periode  $2\pi$  ist. Wegen der Freiheit, die man bei dem Ansatz (2.3) hat, kann man das stets erreichen. Wir integrieren nun (2.5) über alle Phasenvariablen von 0 bis  $2\pi$  und erhalten unter Berücksichtigung der Periodizitätsforderung

$$(2.6) \quad \frac{\partial}{\partial t} \overline{L_f} + \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot \overline{L_{f \underline{x}}} - \overline{L_f} = 0$$

Dabei bedeutet die Operation

$$\overline{(\dots)} = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^{2\pi} ds_1 \dots \int_0^{2\pi} ds_N (\dots)$$

die Phasenmittelung.

Wegen der Periodizität von  $f$  gilt weiterhin

$$(2.7) \quad \overline{\left( \frac{\partial L}{\partial s_n} \right)} = 0, \quad n = 1 \dots N$$

Diese Beziehung ist gleichwertig zu

$$(2.8) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \overline{L}}{\partial \omega_n} \right) - \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot \left( \frac{\partial \overline{L}}{\partial k_n} \right) = 0, \quad n = 1 \dots N$$

Der Beweis verläuft analog wie bei Bisshop (1969) für  $N=1$ . Die Gleichungen (2.8) und (2.6) folgen aus dem Variationsprinzip für die mittlere Lagrange-Funktion

$$(2.9) \quad \delta \int \bar{L} \, dx \, dt = 0$$

Allerdings ist das  $\delta$ -Symbol jetzt so zu verstehen, daß außer der Funktion  $f$  auch die Phasen  $s_n$ , die in  $\bar{L}$  nur durch ihre Ableitungen vorkommen, variiert werden müssen. Wegen der vorausgesetzten Periodizität kann man  $f(s_1 \dots s_N, \underline{x}, t)$  in eine Fourier-Reihe entwickeln

$$(2.10) \quad f(s_1 \dots s_N, \underline{x}, t) = \sum_{l_1, \dots, l_N = -\infty}^{\infty} A_{l_1 \dots l_N}(\underline{x}, t) e^{i \sum_{n=1}^N l_n s_n}$$

Damit  $f$  reell ist, muß  $A_{l_1 \dots l_N} = A_{-l_1, \dots, -l_N}^*$  sein.

Da die Entwicklung (2.10) vollständig ist, kann man in (2.9) statt  $f$  auch die Koeffizientenfunktionen

$A_{l_1 \dots l_N}(\underline{x}, t)$  variieren und erhält anstelle von (2.6)

$$(2.11) \quad \frac{\partial}{\partial t} L_{A_{l_1 \dots l_N} t} + \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot L_{A_{l_1 \dots l_N} \underline{x}} - L_{A_{l_1 \dots l_N}} = 0$$

$$l_1, \dots, l_N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Das Variationsprinzip (2.9) bzw. die daraus folgenden Gleichungen gelten exakt. Sie bedeuten jedoch noch keinen Fortschritt gegenüber der Ausgangsgleichung (2.2); statt einer einzigen partiellen Differentialgleichung haben wir jetzt sehr viele Gleichungen desselben Typs. Um weiterzukommen, müssen wir nunmehr Gebrauch von den eingangs erwähnten Annahmen machen, daß die Schwankungen 1) als quasihomogen bzw. - stationär und 2) als quasilinear angesehen werden können.

Die Änderungen aller Größen im  $\underline{x}$ - $t$ -Raum sollen auf zwei verschiedenen Skalen vor sich gehen: einer kleinen von der Größenordnung einer typischen Wellenlänge bzw. -periode, und einer großen Skala, auf der die mittleren Eigenschaften sich wesentlich ändern können. Das Verhältnis beider Skalen werde durch eine Zahl  $\gamma \ll 1$  beschrieben, die als Entwicklungsparameter dient. Dazu werden für einen Augenblick neue unabhängige Variable eingeführt

$$(2.12) \quad \underline{X} = \gamma \underline{x} \quad , \quad T = \gamma t$$

Es wird nun gefordert, daß nur die Phasen  $s_n$  von  $\underline{x}$  und  $t$  abhängen, während die Größen, also die  $A_n, \dots, \ell_n, \omega_n, k_n$  sowie die mittlere Lagrange-Funktion explizit nur von  $\underline{X}$  und  $T$  abhängen. D.h. also, daß die räumlichen und zeitlichen Ableitungen dieser Größen  $= o(\gamma)$  sind. Dann entwickeln wir die Lagrange-Funktion nach  $\gamma$  an der Stelle  $\gamma = 0$ ,

$$(2.13) \quad \bar{L} = \bar{L}^{(0)} + o(\gamma)$$

und betrachten nur die niedrigste Ordnung dieser Entwicklung.

Aus (2.8) und (2.11) erhält man dann, wenn man noch die Bezeichnung  $\mathcal{L} = \bar{L}^{(0)}$  einführt

$$(2.14) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_n} \right) - \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{k}_n} \right) = 0 \quad , \quad n=1 \dots N$$

$$(2.15) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\ell_1 \dots \ell_N}} = 0 \quad , \quad \ell_1 \dots \ell_N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Definiert man die Geschwindigkeit  $\underline{u}_n = - \frac{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_n}}{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_n}}$   
dann folgt aus (2.14)

$$(2.16) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_n} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left( \underline{u}_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_n} \right) = 0, \quad n=1, \dots, N$$

Die Gleichungen (2.16) haben die Form von Erhaltungsgleichungen für die Größen  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_n}$ , welche als Wirkungs-dichten bezeichnet werden. Die Verknüpfung der Transportgeschwindigkeit  $\underline{u}_n$  mit der Gruppengeschwindigkeit der betreffenden Wellenkomponente wird später ausführlich untersucht.

### Pseudophasen

(2.15) gilt für alle Kombinationen der Indizes. Die Kombination  $(\ell_1, \dots, \ell_N) = (0, 0, \dots, 0)$  bedarf jedoch einer besonderen Betrachtung. Falls die Lagrange-Funktion (2.1) nicht explizit von  $\varphi(\underline{x}, t)$  abhängt, ist nämlich für diese Kombination (2.15) trivialerweise erfüllt. In diesem Fall lautet die niedrigste nichtverschwindende Ordnung von (2.11)

$$(2.17) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial A_{00\dots 0}}{\partial t} \right)} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial A_{00\dots 0}}{\partial x} \right)} \right) = 0$$

Die Größe  $A_{00\dots 0}$  wird dann nach Whitham als Pseudophase bezeichnet. (2.17) ist anstelle von (2.15) immer

dann zu verwenden, wenn nicht die Funktion  $\varphi(\underline{x}, t)$  selbst, sondern nur ihre Ableitungen physikalische Bedeutung haben, also z.B. wenn  $\varphi(\underline{x}, t)$  ein Potential darstellt.

Weiterhin machen wir Gebrauch von der Annahme, daß die Amplituden der Wellenbewegung hinreichend klein sind, um eine Entwicklung nach den Amplituden zu ermöglichen. Dazu wird zunächst die Fourier-Reihe (2.10) umgeordnet

$$(2.18) \quad f(s, s_n, \underline{x}, t) = a(\underline{x}, t) + \sum_n a_n(\underline{x}, t) e^{i s_n} \\ + \sum_{mn} a_{mn}(\underline{x}, t) e^{i(s_m + s_n)} + \dots$$

Dabei sind die Definitionen

$$a = A_{00\dots 0}, \quad a_{\pm n} = A_{00\dots \overset{\text{n-te Stelle}}{\pm 1}} \dots 0,$$

$$a_{\pm m, \pm n} = A_{00\dots \overset{m}{\pm 1} \dots \overset{n}{\pm 1} \dots 0} \quad \text{usw.}$$

sowie  $s_{-n} = -s_n$  benutzt worden.

Die Forderung der Quasilinearität bedeutet nun, daß man etwa  $a_n = o(\xi)$ ,  $a_{mn} = o(\xi^2)$  usw. annehmen kann, wobei  $\xi$  ein Maß für die Wellenamplitude ist. Der Phasenmittelwert  $a$  ist nach unserer Definition die durch das Wellenfeld hervorgerufene Änderung des mittleren Zustandes; dementsprechend ist  $a = o(\xi^2)$ . Die mittlere Lagrange-Funktion wird nun nach dem Parameter  $\xi$  entwickelt. Als wesentlicher Unterschied gegenüber dem Fall eines einzelnen



Wellenzuges ( $N=1$ ) ergibt sich nun, daß diese Entwicklung nicht mehr beliebig weit getrieben werden kann.\*) Ursache dafür ist das Auftreten resonanter Wechselwirkungen. Diese haben zur Folge, daß keine in den Phasen periodische Lösungen der Gleichungen (2.14) und (2.15) existieren, die gleichzeitig die Bedingung erfüllen, daß die Koeffizienten  $a_n$ ,  $a_{mn}$  usw. hinsichtlich  $x$  und  $t$  beliebig schwach veränderliche Funktionen sind; vielmehr ergibt sich ihre Veränderlichkeit aus den Gleichungen. Solche Lösungen existieren nur bis zur  $(n-1)$ -ten Ordnung in  $\xi$ , wenn in der  $n$ -ten Ordnung Frequenzen und Wellenzahlen erstmalig die Resonanzbedingungen erfüllen können.

SIMMONS (1969) hat gezeigt, wie sich Resonanzwechselwirkungen mit einem dem Whitham'schen ähnlichen Formalismus untersuchen lassen. In dieser Arbeit soll jedoch der Einfluß behandelt werden, den die gleichzeitige Anwesenheit von Nichtlinearität und Nichthomogenität auf das Wellenfeld hat. Daher muß offenbar vorausgesetzt werden, daß in der niedrigsten möglichen 2. Ordnung noch keine Resonanz auftreten kann, so daß die Gleichungen (2.14) und (2.15) wenigstens bis zur Ordnung  $\xi^2$  eine Lösung im obigen Sinne haben.

Diese Voraussetzung ist bei Oberflächen-Schwerewellen erfüllt. Probleme wie z.B. interne Schwerewellen oder Kapillar-Schwerewellen, bei denen diese Voraussetzung fehlt, können dagegen nicht in gleicher Weise behandelt werden.

Nach der Entwicklung hinsichtlich  $\xi$  behalten wir von (2.15) ein endliches System algebraischer Gleichungen.

---

\*) Für  $N=1$  im Fall von Wasserwellen (Stokes'sche Welle) kann die Entwicklung zwar beliebig weit getrieben werden, die Lösung ist jedoch instabil gegenüber kleinen Störungen (BENJAMIN & FEIR, 1967).

Aus diesem folgen nach Elimination von  $a$  sowie der  $a_{mn}$  genau  $N$  Gleichungen der Form

$$F_n(\omega_1 \dots \omega_N, k_1 \dots k_N, a_1 \dots a_N, \underline{x}, t) = 0, n=1 \dots N.$$

Sie spielen die Rolle von Dispersionsgleichungen und bilden zusammen mit den Erhaltungsgleichungen (2.14) bzw. (2.16) einen Satz von  $2N$  Differentialgleichungen in  $\underline{x}$  und  $t$  für die linearen Amplituden  $a_n(\underline{x}, t)$  und die Phasen  $s_n(\underline{x}, t)$ , aus denen das großräumige Verhalten dieser Größen bei vorgegebener Anfangsverteilung bestimmt werden kann.

Damit ist das eingangs erwähnte Ziel des Whitham'schen Formalismus im Prinzip erreicht. Da man jedoch zur Beschreibung realer Wellenfelder von der Art des Seegangsfeldes  $N$  als große Zahl ansehen muß, ist dieses Gleichungssystem noch nicht praktikabel. Geht man zur kontinuierlichen Darstellung über, so erhält man daraus eine einzige Differentialgleichung, die natürlich eine unabhängige Variable (die Wellenzahl) mehr hat. Der Übergang wird im nächsten Abschnitt für den speziellen Fall des Seegangsfeldes ausgeführt.

### 3. Anwendung der Whitham'schen Theorie auf Wasserwellen in Euler'schen Koordinaten

Wir betrachten reibungs- und wirbelfreie Oberflächenwellen, gekennzeichnet durch ihr Geschwindigkeitspotential  $\Phi_w(\underline{x}, z, t)$  und die Oberflächenauslenkung  $\zeta_w(\underline{x}, t)$ .

( $\underline{x}$  horizontaler Koordinatenvektor,  $z$  vertikal nach oben). Die Wellenbewegung möge einer mittleren Bewegung überlagert sein, welche durch das Geschwindigkeitsfeld  $\underline{U}(\underline{x}, t)$  und die Auslenkung  $\zeta_m(\underline{x}, t)$  beschrieben wird. Die mittlere

Bewegung wird als beliebig vorgegeben angesehen mit folgenden Einschränkungen:

Die mittlere Strömung soll vorwiegend horizontal und unabhängig von  $z$  sein sowie der Kontinuitätsgleichung genügen; außerdem sollen die mittleren Größen sowie das Bodenprofil  $z = -h(\underline{x})$  langsam veränderliche Funktionen hinsichtlich  $\underline{x}$  und  $t$  sein.

Bezeichnen wir wieder das Verhältnis zwischen typischer Wellenlänge bzw. -periode und großräumige Skala mit  $\gamma$ , ( $\gamma \ll 1$ ), so wird also gefordert, daß

$$(3.1) \quad \frac{\partial \underline{u}}{\partial z}, (\underline{u})_{\text{vertikal}}, \frac{\partial}{\partial t}(\underline{u}, \underline{J}_m), \frac{\partial}{\partial x}(\underline{u}, \underline{J}_m, h) = O(\gamma)$$

gilt.

Die Bewegungsgleichungen ohne äußere Kräfte, wie Wind oder Luftdruckschwankungen, lauten dann, wenn man sich auf die niedrigste Ordnung in  $\gamma$  beschränkt

$$(3.2.1) \quad \Delta \phi_w = 0 \quad -h(\underline{x}) \leq z \leq J(\underline{x}, t)$$

$$(3.2.2) \quad \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi_w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_w}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{\partial \phi_w}{\partial t} - \underline{u} \cdot \frac{\partial \phi_w}{\partial x} + g J = 0 \quad | z = J$$

$$(3.2.3) \quad \frac{\partial J_m}{\partial t} - \frac{\partial \phi_w}{\partial x} \cdot \frac{\partial J_m}{\partial x} + \underline{u} \cdot \frac{\partial J_m}{\partial x} + \frac{\partial \phi_w}{\partial z} = 0 \quad | z = J$$

$$(3.2.4) \quad \frac{\partial \phi_w}{\partial z} = 0 \quad | z = -h(\underline{x})$$

Dabei ist  $J(\underline{x}, t) = J_m + J_w$  die Gesamtauslenkung der Oberfläche.

Für die Anwendung der Whitham'schen Theorie ist es nun erforderlich, daß die Gleichungen (3.2) aus einem Variationsprinzip deduziert werden können. Ein solches ist von LUKE (1966) angegeben worden:

$$(3.3) \quad \delta \int L \, dx \, dt = 0$$

mit

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi_w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_w}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{\partial \phi_w}{\partial t} - u \cdot \frac{\partial \phi_w}{\partial x} + g z \right\} dz$$

Die Gleichungen (3.2) folgen aus (3.3) in niedrigster Ordnung in  $\gamma$ .\*) Das Variationsprinzip (3.3) unterscheidet sich von (2.1) dadurch, daß jetzt die Lagrange-Funktion ein Funktional der gesuchten Funktionen  $\phi_w(\underline{x}, z, t)$  und  $\int_w(\underline{x}, t)$  ist, sowie durch die zusätzliche Abhängigkeit von der vertikalen Koordinate.

In Analogie zu (2.18) setzen wir nun an

$$(3.4.1) \quad \int_w(\underline{x}, t) = a(\underline{x}, t) + \sum_n a_n(\underline{x}, t) e^{i s_n} + \sum_{n, n'} a_{nn'}(\underline{x}, t) e^{i(s_n + s_{n'})} + o(\epsilon^3)$$

$$(3.4.2) \quad \phi_w(\underline{x}, z, t) = b(\underline{x}, z, t) + \sum_n b_n(\underline{x}, z, t) e^{i s_n} + \sum_{n, n'} b_{nn'}(\underline{x}, z, t) e^{i(s_n + s_{n'})} + o(\epsilon^3)$$

Die Phasenfunktionen  $s_n(\underline{x}, t)$ ,  $n=1 \dots N$ , sind dabei gemäß (2.4) mit den Frequenzen und Wellenzahlen verknüpft. Die

---

\*) Die Beschränkung auf die niedrigste Ordnung in  $\gamma$  ist für unsere Zwecke ausreichend. Tatsächlich folgen aber auch die exakten Bewegungsgleichungen aus dem Variationsprinzip.

Amplituden der Wellenbewegung sollen genügend klein sein, so daß wir  $a_n, b_n = o(\varepsilon)$ ,  $a_{mn}, b_{mn} = o(\varepsilon^2)$  usw. annehmen dürfen. Die vom Wellenfeld induzierten Änderungen der mittleren Auslenkung  $a$  und des Potentials der mittleren Geschwindigkeit  $b$  sind dann  $o(\varepsilon^2)$ . Für  $N=1$  wird die folgende Rechnung identisch mit der von WHITHAM (1967).

Hinsichtlich der statistischen Eigenschaften der Zufallsfunktionen  $\int_w(\underline{x}, t)$  und  $\phi_w(\underline{x}, z, t)$  soll wie üblich angenommen werden, daß die Anfangswerte der Phasen  $s_n(\underline{x}, t)$  unabhängig voneinander und in  $[0, 2\pi]$  gleichverteilte Zufallsgrößen sind. Die Gleichungen (3.4) beschreiben dann näherungsweise einen Gauß'schen Prozeß. Diese Annahme ist durch Beobachtungen bestätigt (KINSMAN, 1960).

Die Vertikalstruktur der Koeffizienten  $b$ ,  $b_n$ ,  $b_{mn}$  lässt sich nun leicht ermitteln, indem man mit (3.4.2) in (3.2.1) und (3.2.4) eingeht und nur die niedrigste Ordnung in  $\eta$  betrachtet

$$b(\underline{x}, z, t) = A(\underline{x}, t)$$

$$(3.5) \quad b_n(\underline{x}, z, t) = i \frac{\cosh k_n(z+h)}{\cosh k_n H} A_n(\underline{x}, t)$$

$$b_{mn}(\underline{x}, z, t) = i \frac{\cosh |k_n + k_m|(z+h)}{\cosh |k_n + k_m| H} A_{mn}(\underline{x}, t)$$

Dabei ist  $H(\underline{x}, t) = h(\underline{x}) + \int_m(\underline{x}, t)$  die mittlere Wassertiefe.

Die Faktoren  $i/\cosh k_n H$  bzw.  $i/\cosh (|k_n + k_m| H)$  können selbstverständlich auch in die Definition der unbekannten Koeffizienten  $A_n$  und  $A_{mn}$  einbezogen werden; die Form (3.5) erweist sich jedoch als bequemer.

Geht man mit (3.4.2) und (3.5) in (3.3) ein, so kann die Integration geschlossen ausgeführt werden:

$$L = \sum_{i=1}^3 L_i, \quad \text{mit}$$

$$L_1 = \left( \frac{1}{2} \beta^2 + \underline{u} \cdot \underline{\beta} - \gamma \right) (H + I_w) + \frac{1}{2} g (I^2 - L^2)$$

$$L_2 = \frac{1}{4} \sum_{mn} \frac{A_m A_n \sinh[(\underline{k}_m \pm \underline{k}_n)(H + I_w)] (\underline{k}_m \cdot \underline{k}_m \pm \underline{k}_n \cdot \underline{k}_n)}{(\underline{k}_m \pm \underline{k}_n) \cosh \underline{k}_m H \cosh \underline{k}_n H} e^{i(s_m + s_n)}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{emn} \frac{A_e A_{mn} \sinh[(\underline{k}_e \pm |\underline{k}_m + \underline{k}_n|)(H + I_w)] \{ \underline{k}_e \cdot (\underline{k}_m + \underline{k}_n) \pm \underline{k}_e \cdot |\underline{k}_m + \underline{k}_n| \}}{(\underline{k}_e \pm |\underline{k}_m + \underline{k}_n|) \cosh \underline{k}_e H \cosh |\underline{k}_m + \underline{k}_n| H} e^{i(s_e + s_m + s_n)}$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{jemn} \frac{A_j A_{mn} \sinh[(|\underline{k}_j + \underline{k}_e| \pm |\underline{k}_m + \underline{k}_n|)(H + I_w)]}{(|\underline{k}_j + \underline{k}_e| \pm |\underline{k}_m + \underline{k}_n|) \cosh |\underline{k}_j + \underline{k}_e| H \cosh |\underline{k}_m + \underline{k}_n| H} \cdot \{ (\underline{k}_j + \underline{k}_e) \cdot (\underline{k}_m + \underline{k}_n) \pm |\underline{k}_j + \underline{k}_e| |\underline{k}_m + \underline{k}_n| \} e^{i(s_j + s_e + s_m + s_n)}$$

$$L_3 = - \sum_n A_n \frac{\{ \omega_n - (\underline{u} + \underline{\beta}) \cdot \underline{k}_n \} \sinh \underline{k}_n (H + I_w)}{\underline{k}_n \cosh \underline{k}_n H} e^{i s_n}$$

$$- \sum_{mn} A_{mn} \frac{\{ \omega_m + \omega_n - (\underline{u} + \underline{\beta}) \cdot (\underline{k}_m + \underline{k}_n) \} \sinh |\underline{k}_m + \underline{k}_n| (H + I_w)}{|\underline{k}_m + \underline{k}_n| \cosh |\underline{k}_m + \underline{k}_n| H} e^{i(s_m + s_n)}$$

Dabei sind die Bezeichnungen  $\beta = -\frac{\partial A}{\partial x}$  und  $\gamma = \frac{\partial A}{\partial t}$  eingeführt worden. In  $L_2$  ist jeweils über beide Vorzeichen zu summieren.

Die Lagrange-Funktion (3.6) kann nun nach dem im vorigen Kapitel beschriebenen Verfahren behandelt werden. Zunächst entwickeln wir (3.6) unter Benutzung von (3.4.1) nach Potenzen von  $\xi$  bis einschließlich der Terme 4. Ordnung und erhalten

$$\begin{aligned}
 L = & \frac{1}{2} (\beta^2 + \underline{u} \cdot \underline{\beta} - \gamma) (H + a) + \frac{1}{2} g (J_m^2 + a^2 - h^2) \\
 (3.7) \quad & + \sum_n W_n e^{i s_n} + \sum_{m,n} W_{mn} e^{i (s_m + s_n)} + \sum_{l,m,n} W_{lmn} e^{i (s_l + s_m + s_n)} \\
 & + \sum_{j,l,m,n} W_{jlmn} e^{i (s_j + s_l + s_m + s_n)} + o(\xi^5)
 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten  $W_n, W_{mn}, \dots$ , die hier nicht im einzelnen angegeben werden, hängen nicht mehr von den Phasen ab. Daher ist die nun folgende Phasenmittelung sehr einfach; es ist nämlich

$$\begin{aligned}
 \overline{e^{i s_n}} &= 0; \quad \overline{e^{i (s_m + s_n)}} = \delta_{m,-n}; \quad \overline{e^{i (s_l + s_m + s_n)}} = 0; \\
 (3.8) \quad \overline{e^{i (s_j + s_l + s_m + s_n)}} &= \delta_{jlmn}
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \delta_{jlmn} = & \left( \delta_{j,-l} \delta_{m,-n} + \delta_{j,-m} \delta_{l,-n} + \delta_{j,-n} \delta_{l,-m} \right) \cdot \\
 & \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} [\delta_{je} \delta_{mn} + \delta_{jm} \delta_{en} + \delta_{jn} \delta_{em}] \right)
 \end{aligned}$$



Die letzte der Gleichungen (3.8) sagt aus, daß im Phasennittel nur dann Beiträge zu der entsprechenden Summe auftreten, wenn jeweils zwei der Phasen entgegengesetzt gleich sind, also z.B.  $s_j + s_l = 0$  und  $s_m + s_n = 0$  gilt. Beachtet man die Definition von Wellenzahlen und Frequenzen, so bedeutet dies, daß

$$(3.9) \quad \underline{k}_j + \underline{k}_l = 0, \quad \underline{k}_m + \underline{k}_n = 0, \\ \omega_j + \omega_l = 0, \quad \omega_m + \omega_n = 0.$$

Vom Standpunkt der Theorie der schwachen Wechselwirkungen stellt (3.9) einen Spezialfall der allgemeinen Resonanzbedingung für 4-Wellen-Prozesse dar

$$(3.10) \quad \underline{k}_j + \underline{k}_l + \underline{k}_m + \underline{k}_n = 0$$

$$\omega_j + \omega_l + \omega_m + \omega_n = 0$$

Während die allgemeinen Lösungen von (3.10) von der speziellen Gestalt der Dispersionsrelation abhängen, ist (3.9) stets erfüllbar. LONGUET-HIGGINS und PHILLIPS (1962) haben diese Resonanzwechselwirkungen behandelt; sie fanden, daß damit kein säkularer Energietransport, wohl aber eine Änderung der Phasengeschwindigkeit der Wellenkomponenten einhergeht. Auf das Ergebnis kommen wir weiter unten zurück.

Es sei noch bemerkt, daß die Entwicklung der Lagrange-Funktion (3.7) bis zur 4. Ordnung in  $\epsilon$  durchgeführt wurde, während in (3.4) bereits die Terme  $o(\epsilon^3)$ , z.B. die  $a_{lmn}$  in (3.4.1), vernachlässigt wurden. Es ist jedoch leicht zu sehen, daß diese zur mittleren Lagrange-Funktion nichts beitragen würden, denn die nichtlinearen Amplituden  $a_{lmn}$  oder  $a_{jlmn}$  verschwinden definitionsgemäß immer dann, wenn zwei der Indizes entgegengesetzt gleich sind.

Bei der Berechnung des Ausdruckes  $\sum_{j, l, m, n} W_{j, l, m, n} \delta_{j, l, m, n}$

in (3.7) braucht man nur den in den Indizes symmetrischen Anteil von  $W_{jlmn}$ ,

$$(3.11) \quad W_{jlmn}^{\text{sym}} = \frac{1}{24} \sum_{\substack{\text{Permutation} \\ \text{der Indizes}}} W_{jlmn}$$

zu berücksichtigen, da sich ein antisymmetrischer Anteil bei der Summation weghebt. Definiert man noch

$$V_{mn} = 24 W_{m,-m,n,-n}^{\text{sym}}$$

so erhält man

$$(3.12) \quad \sum_{jlmn} W_{jlmn} \delta_{jlmn} = \frac{1}{2} \sum_{m,n \geq 0} V_{mn} - \frac{1}{4} \sum_{n \geq 0} V_{nn}$$

Die  $V_{mn}$  sind im Anhang angegeben.

Der zweite Term auf der rechten Seite von (3.12) lässt sich als Beitrag der Selbstwechselwirkung interpretieren, da in jedem Summanden nur Komponenten mit gleicher Wellenzahl und Frequenz verknüpft werden. Dieser Beitrag ist gegen den 1. Term vernachlässigbar, wenn man annimmt, daß die Wellenenergie kontinuierlich auf alle Wellenzahlen verteilt ist. Eine genauere Diskussion dieses Sachverhaltes wird weiter unten gegeben.

Damit lautet die mittlere Lagrange-Funktion endgültig

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \mathcal{L} = & (\underline{u} \cdot \underline{\beta} - \gamma)(H + a) + \frac{1}{2} g a^2 + \frac{1}{2} H \beta^2 \\ & + \sum_{n \geq 0} \left\{ A_n A_n^* (k_n T_n + k_n^2 a [1 + T_n^2]) + g a_n a_n^* \right. \\ & \left. - (A_n a_n^* + A_n^* a_n)(\sigma_n - \underline{\beta} \cdot \underline{k}_n)(1 + k_n T_n a) \right\} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{m,n \geq 0} V_{mn} + o(\varepsilon^6) \end{aligned}$$

Dabei ist noch  $\sigma_n = \omega_n - \underline{u} \cdot \underline{k}_n$  und  $T_n = \tanh k_n H$  gesetzt.

Mit (3.13) können wir nun die zu (2.9) gehörigen Variationsgleichungen aufstellen:

$$(3.14.1) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{mn}} = 0, \quad (3.13,2) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{mn}} = 0$$

$$(3.14.3) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_n} = 0, \quad (3.14.4) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_n} = 0$$

$$(3.14.5) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} = 0$$

$$(3.14.6) \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}} = 0$$

$$(3.14.7) \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_n} - \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{k}_n} = 0$$

Bei Gl. (3.14.6) ist zu beachten, daß hier (2.17) statt (2.15) benutzt werden musste, da die Lagrange-Funktion nicht explizit vom Geschwindigkeitspotential abhängt.

Mit den Gleichungen (3.14.1,2 und 4) eliminieren wir zunächst die  $a_{mn}$ ,  $A_{mn}$  und  $A_n$  und erhalten

$$(3.15.1) \quad a_{mn} = P_{mn} a_m a_n + o(\xi^4)$$

$$(3.15.2) \quad A_{mn} = Q_{mn} a_m a_n + o(\xi^4)$$

$$(3.15.3) \quad A_n = \frac{\sigma_n}{k_n T_n} a_n \left\{ 1 - \frac{\beta \cdot \underline{k}_n}{\sigma_n} - \frac{a k_n}{T_n} + \sum_{m,n>0} R_{mn} a_m a_n^* \right\} + o(\xi^5)$$

Definiert man zur Abkürzung

$$(3.16.1) \quad D_{mn} = \frac{1}{2} \left\{ \sigma_m^2 + \sigma_n^2 + \sigma_m \sigma_n \left[ 1 - \frac{k_m \cdot k_n}{k_m T_m k_n T_n} \right] \right\}$$

$$(3.16.2) \quad E_{mn} = \frac{1}{2} \left\{ \underline{k}_m \cdot \underline{k}_n \left( \frac{\sigma_n}{k_n T_n} + \frac{\sigma_m}{k_m T_m} \right) + \frac{\sigma_n k_n}{T_n} + \frac{\sigma_m k_m}{T_m} \right\}$$

$$(3.16.3) \quad \Delta_{mn} = (\sigma_m + \sigma_n)^2 - g |\underline{k}_m + \underline{k}_n| \tanh |\underline{k}_m + \underline{k}_n| H$$

dann ergeben sich die Koeffizienten in (3.15) zu

$$(3.17.1) \quad P_{mn} = \frac{(\sigma_m + \sigma_n) E_{mn} - |\underline{k}_m + \underline{k}_n| \tanh (|\underline{k}_m + \underline{k}_n| H) D_{mn}}{\Delta_{mn}}$$

$$(3.17.2) \quad Q_{mn} = \frac{g E_{mn} - (\sigma_m + \sigma_n) D_{mn}}{\Delta_{mn}}$$

Der Koeffizient  $R_{mn}$  ist algebraisch etwas komplizierter und wird nicht explizit angegeben, da er nur als Zwischenergebnis für die weiteren Rechnungen von Interesse ist.

Gl. (3.14.3) lautet jetzt unter Berücksichtigung von (3.15)

$$(3.18) \quad \sigma_n^2 = g k_n T_n \left\{ 1 + 2 \frac{\sigma_n \beta \cdot k_n}{g k_n T_n} + \frac{\sigma_n^2 a}{g \sinh^2 k_n H} + 4 \sum_{m \neq 0} S_{mn} a_m a_m^* \right\}$$

Dabei ist  $S_{mn}$  gegeben durch

$$(3.19) \quad S_{mn} = \frac{1}{g} \left\{ -D_{m, \pm n} P_{m, \pm n} + E_{m, \pm n} Q_{m, \pm n} + \frac{\sigma_m \sigma_n}{k_m T_m k_n T_n} (k_m T_m + k_n T_n) \underline{k}_m \cdot \underline{k}_n + \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_m^2 k_m}{T_m} + \frac{\sigma_n^2 k_n}{T_n} \right) \right\}$$

Der lineare Anteil von (3.18) liefert die üblichen Dispersionsgleichungen

$$(3.20) \quad \sigma_n^2 = (\omega_n - \underline{u} \cdot \underline{k}_n)^2 = g k_n \tanh k_n H$$

Ersetzt man nun, was im Rahmen der Störungsrechnung konsistent ist, in den Termen 2. Ordnung von (3.18)  $\sigma_n$  durch seinen linearen Wert, so kann man (3.18) schreiben

$$(3.21) \quad \omega_n = \Omega^{(0)}(\underline{k}_n) + \Omega^{(2)}(\underline{k}_1, \dots, \underline{k}_n, a_1, \dots, a_n, \alpha, \beta) + o(\varepsilon^4)$$

mit

$$\Omega^{(0)}(\underline{k}) = \sqrt{g k \tanh k H} + \underline{u} \cdot \underline{k}$$

Die Frequenz einer Wellenkomponente hängt also in dieser Näherung nicht mehr allein von der entsprechenden Wellenzahl, sondern von den Amplituden und Wellenzahlen aller Komponenten des Wellenfeldes ab.

Die Abhängigkeit der Frequenz von den welleninduzierten Änderungen der mittleren Auslenkung,  $a$ , und der mittleren Strömung,  $\beta$ , kann man natürlich auch auf direkterem Wege erhalten, indem man in der linearen Dispersionsrelation  $H$  durch  $H + a$  und  $\underline{U}$  durch  $\underline{U} + \beta$  ersetzt und dann entwickelt.

Gl. (3.21) gestattet einen Vergleich mit dem oben erwähnten Ergebnis von LONGUET-HIGGINS und PHILLIPS (1962), die die Phasengeschwindigkeitsänderung einer Welle durch eine andere infolge von tertiären Resonanzwechselwirkungen zwischen beiden berechnet haben. Es zeigt sich, daß die Änderung für den von diesen Autoren behandelten Spezialfall ( $N=2$ ,  $H=\infty$ ) genau dem Term  $S_{12} |a_1|^2$  aus (3.18) entspricht.\*) Bedenkt man, mit welcher unterschiedlichen

---

\*) Bis auf einen geringfügigen Rechenfehler in der zitierten Arbeit.

Methoden dies Ergebnis erhalten wurde, so ist die Übereinstimmung nicht ohne weiteres selbstverständlich. Sie zeigt, daß die speziellen, von Longuet-Higgins und Phillips betrachteten Resonanzwechselwirkungen mit der in der vorliegenden Arbeit benutzten Methode erhalten werden können, ohne daß dazu säkuläre Terme in der 3. Ordnung der Störungsrechnung aufgesucht werden müssen. Ferner wird sich im folgenden auf einfache Weise ergeben, in welcher Weise diese Wechselwirkungen zum Energietransport beitragen, wenn man die horizontale Inhomogenität des Wellenfeldes berücksichtigt.

Wir betrachten nun (3.14.5) und (3.14.6); mit (3.15.3) erhalten wir

$$(3.22) \quad \underline{u} \cdot \underline{\beta} - \gamma + g a + \sum_{n \neq 0} \frac{\sigma_n^2}{\sinh^2 k_n H} a_n a_n^* = 0$$

und

$$(3.23) \quad \frac{\partial}{\partial t} (H+a) + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left\{ (\underline{u} + \underline{\beta})(H+a) + \sum_{n \neq 0} \frac{k_n}{\sigma_n} 2 g a_n a_n^* \right\} = 0$$

Die niedrigste (0.) Ordnung von (3.23) ist die Kontinuitätsgleichung für die Grundströmung,

$$(3.24) \quad \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot (H \underline{u}) = 0$$

die nach Voraussetzung erfüllt ist. Damit vereinfacht sich (3.23) zu

$$(3.25) \quad \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left\{ \underline{u} a + \underline{\beta} H + \sum_n \frac{k_n}{\sigma_n} 2 g a_n a_n^* \right\} + o(\varepsilon^4) = 0$$

Weiterhin besteht wegen der Definition von  $\beta$  und  $\gamma$  die Beziehung

$$(3.26) \quad \frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0$$

Ersetzt man hierin  $\gamma$  mit Hilfe von (3.22), erhält man

$$(3.27) \quad \frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ u \cdot \beta + g a + \sum_n \frac{k_n}{\sinh 2k_n H} 2g a_n a_n^* \right\} + o(\varepsilon^4) = 0$$

Die beiden Gleichungen (3.25) und (3.27) beschreiben den Einfluß des Wellenfeldes auf mittlere Strömung und Auslenkung. Ihre Beziehung zu den Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls, aus denen sie auch direkt hergeleitet werden können, ist von WHITHAM (1967) für  $N=1$  diskutiert worden. Die Beschränkung auf Terme  $o(\varepsilon^2)$  ist für unsere Zwecke ausreichend, da nur die Rückwirkung dieser Änderungen auf das Wellenfeld untersucht wird.

Als letzte der Variationsgleichungen bleibt (3.14.7).

Zunächst berechnen wir die Wirkungsdichten  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_n}$ :

$$(3.28) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_n} = - \frac{2g a_n a_n^*}{\sqrt{g k_n T_n}} \left\{ 1 - \frac{k_n a}{\sinh 2k_n H} + \frac{2}{g} \sum_{m>0} T_{mn} a_m a_m^* \right\}$$

mit

$$\begin{aligned} T_{mn} = & (\sigma_n^2 - \sigma_m^2) P_{m,n} + D_{m,n} P_{m,n} + E_{m,n} Q_{m,n} + 2\sigma_n P_{m,n} Q_{m,n} \\ & - \frac{\sigma_n}{k_n T_n} \frac{k_n \cdot k_m}{T_n} Q_{m,n} + \frac{\sigma_n k_n}{T_n} Q_{m,n} + \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_m^2 k_m}{T_m} - \frac{\sigma_n^2 k_n}{T_n} \right) \end{aligned}$$



wobei jeweils über beide Vorzeichen zu summieren ist.

In linearer Näherung ist die Wirkungsichte gegeben durch

$$(3.29) \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_n} \right)_{\epsilon_n} = - \frac{2g a_n a_n^*}{\omega_n^{\epsilon_n} - \underline{u} \cdot \underline{k}_n}$$

also (bis auf das Vorzeichen) gleich der Energie der betreffenden Wellenkomponente, dividiert durch die Relativfrequenz gegenüber einem mit der mittleren Geschwindigkeit  $\underline{U}(\underline{x}, t)$  mitbewegten Beobachter. Für lineare Wellenfelder gilt (3.29) ganz allgemein (BRETHERTON & GARRET, 1968).

Zur Aufstellung von (3.14.7) muß noch  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{k}_n}$  berechnet werden, bzw. die Transportgeschwindigkeit  $\underline{u}_n$  aus (2.16); Ergebnis:

$$(3.30) \quad \underline{u}_n = \underline{U} + \underline{\beta} + \frac{g \underline{Z}_n}{2\sqrt{g k_n T_n}} \left( 1 + a_{k_n} \left[ \frac{2}{\underline{Z}_n} - \tanh 2k_n H \right] \right) \frac{\underline{k}_n}{k_n} + \sum_m \left( B_{mn} \frac{\underline{k}_n}{k_n} + C_{mn} \frac{\underline{k}_m}{k_m} \right) a_m a_m^* + o(\epsilon^4)$$

Dabei ist  $\underline{Z}_n = \tanh k_n H + k_n H / \cosh^2 k_n H$ ;

die Koeffizienten  $B_{mn}$  und  $C_{mn}$  werden wegen ihrer komplizierten Gestalt im Anhang angegeben.

Mit den Gleichungen (3.14.7) und (3.18) liegt jetzt ein System von  $2N$  nichtlinearen gekoppelten Differentialgleichungen in  $\underline{x}$  und  $t$  vor, in dem als unbekannte Funktion nur noch die Amplituden  $a_n(\underline{x}, t)$  und die Phasen  $s_n(\underline{x}, t)$  auftreten. Sie könnten daraus im Prinzip bei vorgegebener

Anfangsverteilung bestimmt werden. Dies ist jedoch aus folgenden Gründen nicht sinnvoll:

- 1)  $N$  ist als sehr große Zahl angenommen worden, so daß eine Lösung schwer zu erhalten wäre.
- 2) Wegen der statistischen Natur des Wellenfeldes sind die Anfangswerte der Phasen Zufallsgrößen.
- 3) Weder die Amplituden noch die Phasen sind direkt meßbare Größen, so daß die Lösungen nicht unmittelbar mit Beobachtungen verglichen werden können.

Diese Schwierigkeiten lassen sich beheben, wenn man zur kontinuierlichen Darstellung übergeht; man erhält aus diesen  $2N$  Gleichungen dann eine einzige Gleichung für eine beobachtbare Größe, das Seegangsspektrum.

Bevor dieser Übergang ausgeführt wird, muß jedoch zunächst untersucht werden, in welcher Beziehung die in (2.16) bzw. (3.30) auftretende Transportgeschwindigkeit  $u_n$  zur Gruppengeschwindigkeit der Wellen steht.

#### 4. Beziehung zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit aus (2.16) und der Gruppengeschwindigkeit

In Gl. (2.16) wurde eine Größe  $u_n$  eingeführt, die als Transportgeschwindigkeit für die Erhaltungsgröße  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_n}$

aufgefasst werden kann. Es ist klar, daß diese Geschwindigkeit in einem linearen Wellenfeld mit der Gruppengeschwindigkeit der betreffenden Wellenkomponente zusammenfallen muß. Für eine nichtlineare Einzelwelle trifft dies dagegen nicht zu, wie WHITHAM (1965a) gezeigt hat. Es sollen nun die Verhältnisse in einem Wellenfeld untersucht

werden, dessen Energie kontinuierlich auf alle Wellenzahlen verteilt ist. Dazu gehen wir von der Form (3.13) der mittleren Lagrange-Funktion aus, die sich schreiben lässt als

$$(4.1) \mathcal{L} = \sum_{n=1}^N G(\omega_n, k_n) a_n a_n^* + \frac{1}{2} \sum_{n, m=1}^N V(\omega_n, \omega_m, k_n, k_m) a_n a_m^* a_n^* a_m^* \left[1 - \frac{1}{2} \delta_{mn}\right]$$

Die mittleren Größen  $a$  und  $\sqrt{\beta}$  sind dabei der Einfachheit halber nicht betrachtet worden; dagegen wurde der der Selbstwechselwirkung entsprechende Faktor  $(1 - \frac{1}{2} \delta_{mn})$  in (4.1) nicht vernachlässigt, damit ein Vergleich mit dem Fall  $N=1$  möglich ist.

Die Transportgeschwindigkeit  $\underline{u}_n$  lässt sich mit (4.1) direkt berechnen; es ist ja

$$(4.2) \mathcal{L}_{k_n} = G_{k_n} a_n a_n^* + \sum_m V_{k_n} a_m a_m^* a_n a_n^* \left[1 - \frac{1}{2} \delta_{mn}\right]$$

$$(4.3) \mathcal{L}_{\omega_n} = G_{\omega_n} a_n a_n^* + \sum_m V_{\omega_n} a_m a_m^* a_n a_n^* \left[1 - \frac{1}{2} \delta_{mn}\right]$$

und damit nach Definition

$$(4.4) \underline{u}_n = - \frac{\mathcal{L}_{k_n}}{\mathcal{L}_{\omega_n}} = - \frac{1}{G_{\omega_n}} \left\{ G_{k_n} + \sum_m \left( V_{k_n} + \frac{\partial \mathcal{L}^{(0)}(k_n)}{\partial k_n} V_{\omega_n} \right) a_m a_m^* \left[1 - \frac{1}{2} \delta_{mn}\right] \right\} + o(\epsilon^4)$$

(Indizes bedeuten partielle Ableitungen nach den entsprechenden Variablen).

Dabei sind in den Termen 2. Ordnung die  $\omega_m$  nach Bildung der Ableitungen durch ihren linearen Wert  $\omega(k_m)$  ersetzt worden, der definiert ist durch

$$(4.5) \quad G(\Omega^{(0)}(\underline{k}_n), \underline{k}_n) = 0$$

Außerdem ist zur Herleitung von (4.4) die Beziehung

$$(4.6) \quad \frac{\partial \Omega^{(0)}(\underline{k}_n)}{\partial \underline{k}_n} = - \frac{G_{\underline{k}_n}}{G_{\omega_n}}$$

benutzt, die aus (4.5) durch Differentiation folgt. Die Dispersionsrelation erhält man in impliziter Form aus Gl. (3.14.3)

$$(4.7) \quad G(\omega_n, \underline{k}_n) + \sum_m V(\omega_m, \omega_n, \underline{k}_m, \underline{k}_n) a_m a_m^* [1 - \frac{1}{2} \delta_{mn}]$$

Auch in (4.7) können in den Termen 2. Ordnung die linearen Werte für die Frequenzen genommen werden. Definiert man nun die Geschwindigkeit

$$(4.8) \quad \underline{v}_n = \frac{\partial \omega_n}{\partial \underline{k}_n}$$

so erhält man durch implizite Differentiation von (4.7)

$$(4.9) \quad \underline{v}_n = - \frac{1}{G_{\omega_n}} \left\{ G_{\underline{k}_n} + \sum_m \left( V_{\underline{k}_n} + \frac{\partial \Omega^{(0)}(\underline{k}_n)}{\partial \underline{k}_n} \right) a_m a_m^* \right\}$$

In einem linearen Wellenfeld ist (4.8) die Definition der Gruppengeschwindigkeit. Wir benutzen diese Bezeichnung für  $\underline{v}_n$  auch hier, obwohl im nichtlinearen Fall auch andere Verallgemeinerungen dieses Begriffs möglich sind.

Vergleicht man nun (4.9) mit (4.4), so stellt man zunächst fest, daß in niedrigster Ordnung beide Geschwindigkeiten gleich sind. Das bedeutet, daß sich Änderungen der Wirkungsichte, die ja nach (3.29) mit der Energie

verknüpft ist, mit der entsprechenden Gruppengeschwindigkeit fortpflanzen. Im nichtlinearen Fall dagegen unterscheiden sich (4.4) und (4.9), und zwar in dem Term der Summe, für den  $m = n$  ist.

Betrachten wir zunächst den Fall  $N=1$ , d.h. das Wellenfeld besteht aus einer Einzelwelle mit langsam veränderlichen Eigenschaften. In diesem Fall besteht die Summe nur aus diesem Term, und die Abweichung vom linearen Wert ist in (4.9) doppelt so groß wie in (4.4). Die beiden Geschwindigkeiten unterscheiden sich also in 2. Ordnung in  $\xi$ . Dies Ergebnis sowie seine Konsequenzen für die Ausbreitung eines Wellenzuges sind von WHITHAM (1965a, 1967) diskutiert worden.

Nehmen wir dagegen an, daß die Energie kontinuierlich auf sehr viele Wellenzahlen verteilt ist, dann besteht die Summe aus einer großen Zahl von Summanden, die jeweils einen kleinen Beitrag liefern. Der Unterschied zwischen (4.4) und (4.9) wird also klein und verschwindet ganz beim Übergang zur kontinuierlichen Darstellung.

Die durch (4.8) definierte nichtlineare Gruppengeschwindigkeit und die Transportgeschwindigkeit für die Wirkungsichte unterscheiden sich also nur infolge von Selbstwechselwirkungen, die beim Seegangsfeld gegenüber anderen Wechselwirkungen vernachlässigt werden dürfen. Dies Ergebnis ist deswegen wichtig, weil daraus folgt, daß auch in einem nichtlinearen Wellenfeld das raumzeitliche Verhalten der Wirkungsichte allein aus der Dispersionsrelation, die jetzt durch (3.18) gegeben ist, bestimmt werden kann. Im Gegensatz dazu ist bei einem einzelnen Wellenzug der Ausdruck  $\frac{\partial \Omega}{\partial k}$  ohne jede Bedeutung (BISSHOP, 1969).

## 5. Die Transportgleichung für das Seegangsspektrum in kontinuierlicher Darstellung

Um von (3.14.7) zu einer Gleichung für das Seegangsspektrum zu kommen, muß diese Größe zunächst definiert und mit den Amplituden  $a_n(\underline{x}, t)$  verknüpft werden. Dazu betrachten wir die raumzeitliche Korrelationsfunktion der durch (3.4.1) gegebenen Abweichung der Oberflächenauslenkung von ihrem Mittelwert,  $\zeta' = \zeta_w - a$

$$(5.1) \quad R(\underline{x}, t; \underline{r}, \tau) = \langle \zeta'(\underline{x}, t) \zeta'(\underline{x} + \underline{r}, t + \tau) \rangle$$

Dabei bedeutet  $\langle \dots \rangle$  den Ensemble-Mittelwert.

Es möge nun  $R(\underline{x}, t; \underline{r}, 0)$  als Beobachtungsgröße vorliegen.\*) Die Korrelationsfunktion lässt sich dann mit (3.4.1) und (3.17.1) durch die  $a_n(\underline{x}, t)$  ausdrücken, wenn man die oben (S.17) erwähnte Annahme über die statistischen Eigenschaften des Seegangsfelder verwendet. Für genügend kleine Korrelationsdistanzen (kleiner als die Skala der großräumigen Änderungen) erhält man

$$(5.2.1) \quad R(\underline{x}, t; \underline{r}, 0) = \sum_n E_n \cos \underline{k}_n \cdot \underline{r}$$

mit

$$(5.2.2) \quad E_n(\underline{x}, t) = 2 a_n a_n^* + 4 \sum_m (P_{m, n-m}^2 + P_{m, n+m}^2) a_m a_m^* a_{n-m} a_{n-m}^*$$

---

\*) Diese Annahme ist nicht wesentlich; geht man von der in den meisten Fällen gemessenen Größe  $R(\underline{x}, t; \underline{0}, \tau)$  aus, muß man jedoch zusätzliche Annahmen über die Richtungsverteilung der Wellen einführen.

Die  $E_n(\underline{x}, t)$  kann man dabei als Energie der Wellenkomponente mit der Wellenzahl  $\underline{k}_n(\underline{x}, t)$  ansehen,

da  $R(\underline{x}, t; \underline{0}, 0) = \sum_n E_n$  ist. Dabei ist nicht die physikalische Energie sondern die Energie im Sinne der Zeitreihenanalyse gemeint.

Der nichtlineare Anteil in (5.2.2) lässt sich übrigens anschaulich leicht verstehen. Er kommt daher, daß jeweils zwei Wellenkomponenten sozusagen "Obertöne" mit Summen- bzw. Differenzwellenzahl erzeugen, deren Beitrag zum Spektrum proportional zum Produkt ihrer beiden Energien ist. Dies ist ganz analog zu den Oberschwingungen mit ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz bzw. - Wellenzahl, die man bei der Analyse einer Stokes'schen Welle erhält. Für ein eindimensionales Frequenzspektrum ist dieser Anteil bereits von TICK (1961) untersucht worden. Das kontinuierliche Seegangsspektrum  $F(\underline{k}, \underline{x}, t)$  wird nun definiert durch

$$(5.3) \quad F(\underline{k}, \underline{x}, t) \Delta \underline{k} \hat{=} \sum_n E_n(\underline{x}, t) \\ \underline{k}_n(\underline{x}, t) \in (\underline{k}, \Delta \underline{k})$$

In (5.3) soll nur über solche Werte von  $n$  summiert werden, für die  $\underline{k}_n(\underline{x}, t)$  innerhalb einer Umgebung  $\Delta \underline{k}$  der festen Wellenzahl  $\underline{k}$  liegt. Dabei ist  $\Delta \underline{k}$  einerseits hinreichend klein zu wählen, so daß  $\underline{k}_n(\underline{x}, t) \approx \underline{k}$  für diese Indizes gilt; andererseits soll  $\Delta \underline{k}$  aber so groß sein, daß immer noch eine große Zahl von Punkten in der Umgebung liegt. Aus (5.2.1) wird dann

$$(5.4) \quad R(\underline{x}, t; \underline{r}, 0) = \int F(\underline{k}, \underline{x}, t) \cos \underline{k} \cdot \underline{r} \, d\underline{k}$$



In analoger Weise gehen alle Summen in Integrale über. Das so definierte Spektrum ist als Fourier-Transformierte der Korrelationsfunktion die geeignete Beobachtungsgröße, für die jetzt aus (3.14.7) und (3.21) eine Transportgleichung hergeleitet wird. Gl. (3.14.7) läßt sich schreiben als

$$(5.5) \quad \frac{\partial}{\partial t} (E_n J(k_n)) + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left( \frac{\partial \Omega(k_n)}{\partial k_n} E_n J(k_n) \right) = 0$$

$n = 1 \dots N$

Ein Unterschied zum linearen Fall tritt nur in der Gestalt der Funktionen  $\Omega(k_n)$  und  $J(k_n)^*$  auf, für die jetzt die entsprechenden nichtlinearen Ausdrücke zu nehmen sind. Die Abhängigkeit von allen anderen Wellenzahlen verschwindet beim Grenzübergang.

Daher läßt sich die kontinuierliche Transportgleichung sofort hinschreiben

$$(5.6) \quad \frac{D}{Dt} (F(k, x, t) J(k, x, t)) = 0$$

mit

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial k} \cdot \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial k}$$

Gl. (5.6) wird meist durch Analogie mit der klassischen Mechanik in der Hamilton'schen Formulierung begründet, wobei die Frequenz die Rolle der Hamilton-Funktion übernimmt. Im folgenden wird eine elementare Herleitung

- \*) Die explizite Abhängigkeit dieser Funktionen von  $x$  und  $t$  wird häufig nicht zum Ausdruck gebracht.

gegeben, die direkt von (5.3) und (5.5) ausgeht.\*<sup>1</sup> Dazu führen wir zunächst die Anfangswerte der Wellenzahlen,  $\underline{x}_n = \underline{k}_n(\underline{x}, 0)$ , als Indizes ein

$$(5.7.1) \quad E_n(\underline{x}, t) = E(\underline{x}, t, \underline{x}_n)$$

$$(5.7.2) \quad \underline{k}_n(\underline{x}, t) = \underline{k}(\underline{x}, t, \underline{x}_n)$$

Die  $\underline{x}_n$  können o.B.d.A. als konstant, d.h. unabhängig von  $\underline{x}$ , angesehen werden. Durch Umkehrung von (5.7.2) erhält man

$$(5.8) \quad \underline{x}_n = \underline{x}(\underline{x}, t, \underline{k}_n)$$

Wegen der Konstanz von  $\underline{x}_n$  gelten die Beziehungen

$$(5.9.1) \quad \left( \frac{\partial \underline{x}_n}{\partial t} \right)_{\underline{k}_n} = - \frac{\partial \underline{x}_n}{\partial \underline{k}} \cdot \frac{\partial \underline{k}_n}{\partial t}$$

$$(5.9.2) \quad \left( \frac{\partial \underline{x}_n}{\partial \underline{x}} \right)_{\underline{k}_n} = - \frac{\partial \underline{x}_n}{\partial \underline{k}} \cdot \frac{\partial \underline{k}_n}{\partial \underline{x}}$$

Der Index an der Klammer deutet an, daß  $\underline{k}_n$  bei der Differentiation festzuhalten ist.

Zu einem Intervall  $(\underline{k}, \Delta \underline{k})$  in der  $\underline{k}$ -Ebene, in dem gewisse der  $\underline{k}_n(\underline{x}, t)$  liegen, gehört nun ein entsprechendes Intervall  $(\underline{x}, \Delta \underline{x})$  in der  $\underline{x}$ -Ebene. Sie sind verknüpft durch  $\Delta \underline{x} = I(\underline{x}, t, \underline{k}) \Delta \underline{k}$ ; dabei ist  $I(\underline{x}, t, \underline{k}) = \partial(\underline{x})/\partial(\underline{k})$

\*<sup>1</sup>) Einen eleganteren, aber weniger elementaren Beweis findet man bei DEWAR (1970).

die Funktionaldeterminante der Transformation (5.8). Mit Hilfe der Beziehungen (5.9) zeigt man, daß sie folgender Gleichung genügt

$$(5.10) \quad \frac{D}{Dt} I(\underline{x}, t, \underline{k}_n) = \left[ \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{k}_n} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \underline{k}_n} \cdot \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{k}_n} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \right)}_{\underline{k}_n} \right] I(\underline{x}, t, \underline{k}_n)$$

Dabei ist noch benutzt worden, daß wegen (2.4)

$$\frac{\partial \underline{k}_n}{\partial t} + \frac{\partial \omega_n}{\partial \underline{x}} = 0$$

ist; mit (3.21) folgt daraus

$$(5.11) \quad \frac{\partial \underline{k}_n}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{k}_n} \cdot \frac{\partial \underline{k}_n}{\partial \underline{x}} = - \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{x}} \right)_{\underline{k}_n}$$

Weiter ist

$$(5.12.1) \quad \left( \frac{\partial E}{\partial t} \right)_{\underline{x}_n} = \left( \frac{\partial E}{\partial t} \right)_{\underline{k}_n} + \frac{\partial E}{\partial \underline{x}_n} \cdot \left( \frac{\partial \underline{x}_n}{\partial t} \right)_{\underline{k}_n}$$

$$(5.12.2) \quad \left( \frac{\partial E}{\partial \underline{x}} \right)_{\underline{k}_n} = \left( \frac{\partial E}{\partial \underline{x}} \right)_{\underline{k}_n} + \frac{\partial E}{\partial \underline{x}_n} \cdot \left( \frac{\partial \underline{x}_n}{\partial \underline{x}} \right)_{\underline{k}_n}$$

Unter Benutzung von (5.9) erhält man dann aus (5.5)

$$(5.13) \quad \frac{D}{Dt} (EJ) + EJ \left[ \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{k}_n} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \underline{k}_n} \cdot \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \underline{k}_n} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \right)}_{\underline{k}_n} \right] = 0$$

Multipliziert man nun (5.13) mit  $I(\underline{x}, t, \underline{k}_n)$ , (5.10) mit  $E(\underline{x}, t, \underline{x}_n) \cdot J(\underline{k}_n)$  und addiert beide Gleichungen, so ergibt sich

$$(5.14) \quad \frac{D}{Dt} \left( E(\underline{x}, t, \underline{x}_n) I(\underline{x}, t, \underline{k}_n) J(\underline{k}_n) \right) = 0$$

Damit ist die Transportgleichung (5.6) bewiesen, wenn wir noch zeigen können, daß  $F(\underline{k}, \underline{x}, t) = E(\underline{x}, t, \underline{x}(\underline{x}, t, \underline{k})) I(\underline{x}, t, \underline{k})$  ist. Dies folgt aber aus (5.3); es ist ja

$$\sum_{\underline{k}_n \in (\underline{k}, \Delta \underline{k})} E_n = \sum_{\underline{x}_n \in (\underline{x}, \Delta \underline{x})} E(\underline{x}, t, \underline{x}_n) \hat{=} E(\underline{x}, t, \underline{x}) \Delta \underline{x} \cdot q$$

wobei  $q$  die Wellenzahldichte (Anzahl pro Flächeneinheit) in der  $\underline{x}$ -Ebene ist und willkürlich zu 1 angenommen werden kann; dann ist

$$F(\underline{k}, \underline{x}, t) \Delta \underline{k} = E(\underline{x}, t, \underline{x}) \Delta \underline{x} = E(\underline{x}, t, \underline{x}) I(\underline{x}, t, \underline{k}) \Delta \underline{k} \quad q.e.d.$$

Damit ist das in der Einleitung erwähnte Ziel erreicht, nämlich eine Gleichung, die die großräumige Ausbreitung eines Seegangsfeldes unter Berücksichtigung der Nichtlinearität der Bewegungsgleichungen beschreibt. Es wird zunächst die Bedeutung des linearen Anteils von (5.6) diskutiert. Setzt man  $J(\underline{k}, \underline{x}, t) = J^{(0)} + J^{(2)}$  und

$\Omega(\underline{k}, \underline{x}, t) = \Omega^{(0)} + \Omega^{(2)}$ , wobei der Index die Ordnung hinsichtlich des Störungsparameters  $\varepsilon$  angibt, dann ist

$$(5.15) \quad J^{(0)} = \frac{1}{\sigma^{(0)}} = \frac{1}{\sqrt{g k \tanh kH}}; \quad \Omega^{(0)} = \sigma^{(0)} + \underline{u} \cdot \underline{k}$$

Die lineare Transportgleichung

$$(5.16) \quad \left( \frac{D}{Dt} \right)^{(0)} (F J^{(0)}) = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \Omega^{(0)}}{\partial \underline{k}} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{x}} - \frac{\partial \Omega^{(0)}}{\partial \underline{x}} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{k}} \right) F J^{(0)} = 0$$

ist in dieser Form von HASSELMANN (1970) angegeben worden. In einem linearen Wellenfeld ist das Spektrum  $F(\underline{k}, \underline{x}, t)$  ein Maß für die spektrale Energiedichte. Schreibt man nun (5.16) in der Form

$$(5.17) \left( \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \right)^{(0)} F + \frac{F}{J^{(0)}} \left( \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t} \right)^{(0)} J^{(0)} = 0$$

dann gibt der zweite Term den Energiefluß vom Wellenfeld zur mittleren Strömung (oder umgekehrt) an. BRETHERTON & GARRET (1968) haben gezeigt, daß er identisch ist mit dem Produkt aus "radiation-stress" Tensor und Gradient der mittleren Strömung, entsprechend dem schon früher auf andere Weise erhaltenen Ergebnis von LONGUET-HIGGINS & STEWART (1961).

Gleichung (5.16) kann im Prinzip durch Integration der charakteristischen Gleichungen gelöst werden

$$(5.18) \quad \dot{x} = \frac{\partial \Omega^{(0)}}{\partial k}, \quad \dot{k} = - \frac{\partial \Omega^{(0)}}{\partial x}$$

Auf einer durch (5.18) gegebenen Charakteristik ist die Wirkungsichte (bzw. bei horizontal konstanter mittlerer Strömung die Energiedichte) konstant. Die Energie wird auf der Charakteristik mit Gruppengeschwindigkeit transportiert, und durch Bodenunebenheiten oder Scherströmungen wird eine Wellenzahländerung, d.h. Refraktion, hervorgerufen. Die Charakteristiken sind gerade Linien, falls mittlere Strömung und Wassertiefe horizontal konstant sind. Für die Frequenz einer Wellengruppe gilt auf einer Charakteristik

$$(5.19) \quad \dot{\omega} = \frac{\partial \Omega^{(0)}}{\partial t}$$

sie bleibt also konstant, wenn die mittleren Verhältnisse zeitunabhängig sind.

Betrachten wir nun die nichtlinearen Korrekturen zu (5.16). Nach (3.18), (3.28) und (5.2.2) gilt ja

$$(5.20.1) \quad \Omega^{(1)} = \beta \cdot \underline{k} + \frac{\sigma^{(0)} k a}{\sinh 2kH} + \sigma^{(0)} \int S(\underline{k}', \underline{k}) F(\underline{k}') d\underline{k}'$$

$$(5.20.2) \quad J^{(1)} = -\frac{k a}{\sigma^{(0)} \sinh 2kH} + \int d\underline{k}' F(\underline{k}') \left\{ \frac{T(\underline{k}', \underline{k})}{\sigma^{(0)}} - P(\underline{k}', \underline{k} + \underline{k}') \frac{F(\underline{k} + \underline{k}')}{F(\underline{k})} \right\}$$

Wegen der in (5.20) auftretenden Integrale stellt (5.6) jetzt eine Integro-Differentialgleichung für  $F(\underline{k}, \underline{x}, t)$  dar. Diese ist außerdem gekoppelt mit den beiden Gleichungen, die den Einfluß des Wellenfeldes auf die mittleren Größen beschreiben; nach (3.25) und (3.27) ist ja

$$(5.21.1) \quad \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left\{ \underline{u} a + H \underline{\beta} + \left( \frac{k}{\sigma^{(0)}} g F(\underline{k}) d\underline{k} \right) \right\} = 0$$

$$(5.21.2) \quad \frac{\partial \underline{\beta}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left\{ \underline{u} \cdot \underline{\beta} + g a + \left( \frac{k g F(\underline{k})}{\sinh 2kH} d\underline{k} \right) \right\} = 0$$

Die Gleichungen entkoppeln sich im Grenzfall  $H \rightarrow \infty$ ; dann verschwinden  $a$  und  $\underline{\beta}$ .

In speziellen Fällen kann man die Änderungen der mittleren Größen direkt aus (5.21) angeben; z.B. erhält man für ein stationäres Seegangsfeld bei verschwindender Grundströmung

$$(5.22) \quad \underline{\beta} = -\frac{1}{H} \int \frac{k}{\sigma^{(0)}} g F(\underline{k}) d\underline{k}$$

$$a = -\frac{1}{g} \int \frac{k g F(\underline{k})}{\sinh 2kH} d\underline{k}$$

Diese Werte kann man in (5.20) einsetzen und hat dann in der Transportgleichung nur noch  $F(\underline{k}, \underline{x}, t)$  als unbekannte Funktion.

Gegenüber der linearen Transportgleichung ergeben sich nun folgende Änderungen:

Zunächst ist allgemein  $DJ/Dt \neq 0$ , auch wenn der Horizontalgradient der mittleren Strömung verschwindet. Daher tritt stets ein "Energie"fluß<sup>\*)</sup> analog zum 2. Term von (5.17) auf. Weiterhin ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $\frac{\partial \Omega}{\partial k}$  gegenüber ihrem linearen Wert abgeändert. Insbesondere fällt ihre Richtung auch dann nicht mehr mit der entsprechenden Wellenzahlrichtung zusammen, wenn keine mittlere Strömung vorhanden ist. Anschaulich läßt sich das so verstehen, daß durch die Hauptausbreitungsrichtung des Wellenfeldes eine Vorzugsrichtung gegeben ist und daher keine horizontale Isotropie mehr gegeben ist. Dagegen läßt sich die Gruppengeschwindigkeitsänderung nicht deuten als Stokes'sche Massentransportgeschwindigkeit des Wellenfeldes; vgl. auch LONGUET-HIGGINS & PHILLIPS (1962).

Durch das Vorhandensein des Wellenfeldes ändern sich also die Ausbreitungseigenschaften, und diese Änderungen bewirken wie üblich Refraktion und Krümmung der Charakteristiken, auch bei horizontal homogenen mittleren Verhältnissen.

Allerdings lassen sich die (analog zu (5.18) definierten) Charakteristiken jetzt nicht mehr wie im linearen Fall im voraus berechnen und für die Konstruktion der Lösungen verwenden, da zur Berechnung von  $\Omega$  das Spektrum bereits bekannt sein müsste. Man kann (5.6) aber noch auf eine andere Form bringen, die man erhält, indem man die Korrekturen als Störungen auffasst

$$(5.23) \quad \left( \frac{D}{Dt} \right)^{(0)} F J^{(0)} = S_I(k, x, t)$$

$$S_I(k, x, t) = - \left( \frac{D}{Dt} \right)^{(0)} F J^{(2)} - \left( \frac{D}{Dt} \right)^{(2)} (F J^{(0)} + o(i^n))$$

\*) "Energie" im oben erwähnten Sinne.



Diese Form ist insofern bequemer, als man (5.23) als lineare Differentialgleichung mit inhomogenem Term ansehen kann. Die Ausbreitung erfolgt jetzt wieder auf den linearen Charakteristiken gemäß (5.18), jedoch ist auf ihnen die lineare Wirkungsichte nicht konstant, sondern ändert sich gemäß

$$(5.24) \quad \dot{(Fj^{(0)})} = S_I$$

Natürlich wird dadurch die Lösung der Transportgleichung nicht einfacher. Jedoch erlaubt (5.23) einen Vergleich mit all den Beiträgen zum Energietransport, die in dieser Arbeit nicht berücksichtigt worden sind. Für diese besteht nämlich eine Gleichung derselben Bauart wie (5.23) mit einer Quellfunktion  $S(\underline{k}, \underline{x}, t)$ , welche u.a. den Einfluß von erzeugenden Kräften, Dissipation und Resonanzwechselwirkungen enthält. Eine ausführliche Diskussion dieser Quellfunktion findet man bei HASSELMANN (1968)\*).

Die in dieser Arbeit berechneten Terme  $S_I(\underline{k}, \underline{x}, t)$  können größenordnungsmäßig gegenüber der Quellfunktion abgeschätzt werden. Wir wählen dazu den Anteil  $S_R$ , den die Resonanzwechselwirkungen zu  $S(\underline{k}, \underline{x}, t)$  beitragen. Dieser Anteil ist im wesentlichen von der Form

$$(5.25) \quad S_R = \int d\underline{k}' d\underline{k}'' \dots F(\underline{k}) F(\underline{k}') F(\underline{k}'')$$

wobei durch ... ein hier nicht weiter interessierender Integralkern angedeutet ist. Da  $F(\underline{k}) = o(\xi^2)$ , ist  $S_R = o(\xi^6)$ . Aus (5.23) folgt, daß  $S_I = o(\eta \xi^4)$ ; demnach ist

---

\*) Die dort mit S bezeichnete Quellfunktion ist geringfügig anders definiert als hier.

$$(5.26) \quad \frac{S_I}{S_R} = o\left(\frac{\eta}{\xi}\right)$$

Nimmt man etwa an, daß  $\xi$  einer mittleren Wellensteilheit entspricht, und setzt  $\xi \approx 0.1$ , dann ist das Verhältnis  $S_I/S_R$  nicht mehr klein, falls  $\eta \approx 10^{-2}$ , d.h. falls sich die Eigenschaften des Wellenfeldes über 100 typische Wellenlängen (oder -perioden) wesentlich ändern. Diese Abschätzung ist natürlich sehr grob; sie zeigt aber, daß für Größenordnungen von  $\xi$  und  $\eta$ , die zumindest im Flachwasser nicht völlig unrealistisch sind, der durch  $S_I$  gegebene Beitrag nicht ohne weiteres als klein gegenüber den Resonanzwechselwirkungen vorausgesetzt werden kann. Für eine genauere Diskussion der Bedeutung von  $S_I(\underline{k}, \underline{x}, t)$  ist eine numerische Berechnung erforderlich, die an Hand von zwei Beispielen im nächsten Abschnitt durchgeführt wird.

## 6. Numerische Auswertung der in der Transportgleichung vorkommenden Integralausdrücke

Die Transportgleichung (5.23) kann im Prinzip für ein bestimmtes Seegebiet mit einer vorgegebenen Anfangsverteilung  $F(\underline{k}, \underline{x}, t_0)$  gelöst werden. Dies ist natürlich nur sinnvoll, wenn man alle Beiträge zum Energiefluß, d.h. zur Quellfunktion, berücksichtigt. Numerische Lösungsverfahren sind u.a. von BARNETT et al. (1969) und EWING (1971) für Tiefwasser, PIEST (1968) und COLLINS (1972) für Flachwasser benutzt worden. Dabei wurde für die Quellfunktion gewöhnlich ein halbempirischer Ausdruck genommen, teils aus Gründen der rechnerischen Bequemlichkeit (um z.B.

häufige Auswertung von Wechselwirkungsintegralen zu vermeiden), teils deswegen, weil die tatsächliche Quellfunktion noch nicht hinreichend genau bekannt ist.

Eine numerische Lösung, einmal mit und einmal ohne Berücksichtigung des in den vorhergehenden Abschnitten behandelten Energieflusses  $S_I(\underline{k}, \underline{x}, t)$  durchgeführt, würde zeigen, welche Bedeutung diesem Anteil zukommt. Dieser Vergleich wäre jedoch sehr aufwendig und kommt für eine bloße Abschätzung nicht in Betracht. Ein direkter Vergleich dieses Anteils mit anderen Beiträgen zur Quellfunktion, etwa analog zu (5.26), ist jedoch ebenfalls schwierig, da zur Berechnung von  $S_I$  nach (5.23) der horizontale und zeitliche Verlauf des Wellenfeldes sehr genau bekannt sein müssen, damit die entsprechenden Differentialquotienten gebildet werden können.

Im folgenden soll daher lediglich das Verhältnis der nichtlinearen gegenüber den entsprechenden linearen Termen der Transportgleichung quantitativ untersucht werden. Dazu ist nur die Kenntnis der Wellenzahlabhängigkeit des Spektrums erforderlich. Die Form des Wellenzahlspektrums ist gewöhnlich im tiefen und flachen Wasser sehr unterschiedlich. Beide Fälle werden daher gesondert betrachtet, wobei jeweils ein empirisches Spektrum zugrunde gelegt wird.

#### a) Tiefwasserbeispiel

Die Funktion  $F(\underline{k}) = F(k, \phi)$  lässt sich aufspalten in  $F(k, \phi) = S(k, \phi)f(k)$  mit der Normierung

$$(6.1) \quad \int_{-\pi}^{\pi} S(k, \phi) d\phi = 1$$

( $\phi$  Wellenzahlrichtung).

Für das skalare Spektrum  $f(k)$  verwenden wir die von PIERSON & MOSKOWITZ (1964) angegebene empirische Formel

$$(6.2) \quad f(k) = \frac{\alpha}{2} k^{-4} e^{-2\left(\frac{k_0}{k}\right)^2}$$

mit  $\alpha \approx 10^{-2}$ ,  $k_0 = 0.61 \frac{g}{u^2}$  (U Windgeschwindigkeit)

Das Energiemaximum liegt bei  $k = k_0$ ; für kurze Wellen ist  $f(k) = \frac{\alpha}{2} k^{-4}$ , entsprechend der Gleichgewichtstheorie von PHILLIPS (1957).

Gl. (6.2) gilt für ein ausgereiftes, nicht fetchbegrenztes Seegangsspektrum. Bei einem fetchbegrenzten Spektrum ist der Abfall zu den langen Wellen hin steiler, wie Messungen in der Nordsee ergeben haben (HASSELMANN et al, 1973). Zum Vergleich wurde neben (6.2) auch ein typisches JONSWAP-\*) Spektrum verwendet; die Ergebnisse waren jedoch nur wenig unterschiedlich und werden hier nicht wiedergegeben.

Zur Spezifizierung des Spektrums muß noch die Richtungsverteilung  $S(k, \phi)$  angegeben werden. Wir wählen den häufig gebrauchten Ausdruck

$$(6.3) \quad S(k, \phi) = \begin{cases} \frac{g}{3\pi} \cos^4 \phi & \text{für } |\phi| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(6.3) beschreibt eine Energieverteilung, die in einem Winkelbereich von etwa  $60^\circ$  um die Hauptausbreitungsrichtung  $\phi = 0$  konzentriert ist.

Zu Vergleichszwecken wurde daneben auch die Funktion

$$(6.4) \quad S(k, \phi) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{für } |\phi| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

benutzt, die eine in einer Halbebene isotrope Energieverteilung beschreibt. Es zeigt sich aber, daß die genaue

---

\*) von "Joint North Sea Wave Project"

Form der Richtungsverteilung nicht sehr wesentlich ist.

Die Ergebnisse werden in dimensionsloser Form als Funktion von  $k/k_0$  dargestellt; sie sind dann unabhängig von der Windgeschwindigkeit.

In Abb.1 ist der Betrag der relativen Änderung der Gruppengeschwindigkeit über  $k/k_0$  für verschiedene Richtungen aufgetragen. Die Änderung steigt mit dem Betrag der Wellenzahl monoton an (für  $k \gg k_0$  wie  $\sqrt{k}$ ); im interessierenden Bereich bleibt sie unterhalb von einigen Prozent. Die Energie kurzer Wellen wird also bis zu diesem Prozentsatz schneller als mit der linearen Gruppengeschwindigkeit transportiert. Die Gruppengeschwindigkeit langer Wellen wird dagegen nur wenig verändert. Kurze Wellen spüren also mehr als lange den Einfluß des Wellenfeldes auf die Ausbreitungsbedingungen.

Die entsprechenden Kurven für die Richtungsverteilung (6.4) liegen bei etwas niedrigeren Werten, verlaufen aber qualitativ sehr ähnlich.

In Abb.2 ist die Richtung der Gruppengeschwindigkeitsänderung aufgetragen. Sie liegt innerhalb von etwa  $20^\circ$  um die Hauptausbreitungsrichtung, ist aber bemerkenswerterweise nicht mit dieser identisch. Die Gruppengeschwindigkeitsänderung lässt sich also im wesentlichen als eine Mitnahme durch das Wellenfeld interpretieren, wobei allerdings diese Mitnahme weder der Richtung noch dem Betrage nach mit der Stokes'schen Massentransportgeschwindigkeit des Wellenfeldes zusammenfällt.

Abb.3 gibt die relative Änderung der Wirkungsdichte,  $J^{(2)}/J^{(0)}$ , wieder. Der vergleichsweise unregelmäßige Verlauf der Kurven wird verständlich, wenn man den Ausdruck für  $J^{(2)}$  aus (5.20.2) näher betrachtet. Der Integrand besteht aus zwei Summanden. Der erste gibt an, um wieviel

die Erhaltungsgröße von ihrem linearen Wert abweicht. Er wurde für eine stark nichtlineare Einzelwelle von CRAPPER (1972) untersucht. Der zweite Summand beschreibt die Änderung der Verknüpfung des gemessenen Spektrums mit den linearen Wellenamplituden (TICK, 1961). Die beiden Summanden haben entgegengesetztes Vorzeichen und kompensieren sich weitgehend, wie aus Abb.4 ersichtlich. Würde man nur einen der beiden Anteile betrachten, so käme man hinsichtlich der Ausbreitungseigenschaften des nichtlinearen Wellenfeldes zu falschen Schlüssen. Infolge ihrer Eigenschaft als Differenz von zwei großen Zahlen sind die Schwankungen von  $J^{(2)}/J^{(0)}$  für verschiedene Parameterwerte und Richtungsverteilungen erheblich. Wegen der absoluten Kleinheit dürfte jedoch die Änderung in den meisten Fällen ohne praktische Bedeutung sein.

Insgesamt ergibt sich, daß das Ausbreitungsverhalten eines typischen Wellenfeldes im tiefen Wasser nicht wesentlich von der linearen Theorie abweicht.

#### b) Flachwasserbeispiel

Für Flachwasserseegang gibt es kein typisches Spektrum mit einem ähnlich großen Gültigkeitsbereich, wie ihn das P-M-Spektrum im Ozean hat. Die Form des Spektrums hängt hier gewöhnlich stark von der Topographie des betrachteten Gebietes ab. Statt eines Modellspektrums wird daher ein tatsächlich beobachtetes Spektrum für die numerische Rechnung verwendet; alle Aussagen gelten dann natürlich nur für diesen speziellen Fall. Es soll jedoch hier lediglich darauf ankommen, die Größenordnung der Integrale in der Transportgleichung abzuschätzen.

Wir wählen ein Spektrum, das von SCHRADER (1968) im Gebiet der Elbmündung gemessen worden ist, bei einer Wassertiefe von 7,5 m und einer charakteristischen Wellenhöhe

von über 2 m. Es ist in Abb.5 als Frequenzspektrum gezeichnet; für unsere Zwecke muß es natürlich zuerst in ein Wellenzahlspektrum umgerechnet werden. Das Spektralmaximum liegt bei einer Wellenlänge von 60 m. Da die tatsächliche Richtungsverteilung nicht bekannt ist, wird wieder (6.3) angenommen, möglicherweise mit geringerer Berechtigung als im tiefen Wasser.

In Abb.6 ist die relative Gruppengeschwindigkeitsänderung infolge der Wechselwirkungen der Wellen aufgetragen. Bei großen Wellenzahlen verlaufen die Kurven ähnlich wie im tiefen Wasser. Allerdings sind die Änderungen jetzt erheblich größer, für Wellenlängen von  $1/3$  der Wellenlänge des Spektralmaximums bereits über 10%. Bei kleineren Wellenzahlen weicht das Bild gegenüber dem früheren etwas ab; z.B. hängt die Gruppengeschwindigkeitsänderung hier nicht mehr monoton von der Wellenzahlrichtung ab. Die (hier nicht wiedergegebene) Richtung der Gruppengeschwindigkeitsänderung verläuft ähnlich wie in Abb.2; sie bleibt innerhalb von 10% der Hauptausbreitungsrichtung.

Weiterhin ist in Abb.6 der Einfluß der welleninduzierten mittleren Strömung  $\beta$ , die nach (5.22) berechnet wurde, eingetragen. Es ergab sich ein Wert  $\beta = 0.12$  m/sec, entgegengesetzt zur Hauptausbreitungsrichtung. Das bedeutet eine Verminderung der Gesamtänderung um etwa  $1/3$ . Der Einfluß der welleninduzierten Wasserstandsänderung ( $a \approx 3$  cm) auf die Gruppengeschwindigkeit ist dagegen zu vernachlässigen.

In Abb.7 sind die beiden Summanden aus dem Integral in (5.20.2) aufgetragen, die zur Änderung der Erhaltungsgröße beitragen. Auch hier liegen die Werte zahlenmäßig weit höher als im Tiefwasser. Da beide Anteile verschiedene Vorzeichen haben, ist der genaue Verlauf ihrer vergleichsweise kleinen Summe wegen unvermeidlicher Ungenauigkeiten



bei der numerischen Integration recht unsicher und ist daher nicht eingezeichnet. Wiederum würde man jedoch eine völlig falsche Größenordnung erhalten, wenn man nur einen der beiden Anteil berücksichtigt.

Von der welleninduzierten Wasserstandsänderung wird die Erhaltungsgröße nicht merkbar beeinflusst.

Auf den Kurvenverlauf im einzelnen wird nicht weiter eingegangen, da nicht klar ist, wie weit er von den speziellen Eigenschaften des verwendeten Spektrums abhängt. Jedoch kann man annehmen, daß die Größenordnung der Änderung der Ausbreitungseigenschaften einigermaßen repräsentativ für Flachwasserspektren mit hoher Gesamtenergie ist. Da zudem die horizontalen Skalen im flachen Wasser meist vergleichsweise klein sind, scheint es nicht gerechtfertigt, die entsprechenden Terme in der Transportgleichung ohne weiteres zu vernachlässigen. Allerdings muß berücksichtigt werden, daß Vorgänge wie z.B. turbulente Bodenreibung, Streuung an Bodenunebenheiten und Brandung wahrscheinlich sehr wesentlich für den Energietransport sind. Für eine weitere Verbesserung unserer Kenntnisse des Flachwasserseegangs ist ein genaueres Verständnis dieser Vorgänge notwendig.

## 7. Zusammenfassung

Es wird der Energiefluß im Seegangsfeld unter Vernachlässigung von erzeugenden Kräften und Reibung untersucht. Insbesondere werden solche Wellenfelder betrachtet, die horizontal nicht homogen und zeitlich nicht stationär sind und außerdem eine endliche Amplitude haben. Ausgehend

von den hydrodynamischen Bewegungsgleichungen wird eine Störungsrechnung mit Hilfe des im 2. Kapitel beschriebenen Whitham'schen Formalismus durchgeführt. Es stellt sich heraus, daß die für den horizontalen Energiefluß entscheidende Gruppengeschwindigkeit gegenüber der linearen Theorie modifiziert wird. Die Änderungen an der Energietransportgleichung lassen sich als zusätzlicher Energiefluß interpretieren. Eine für zwei typische Fälle durchgeführte numerische Rechnung ergab, daß diese Änderungen hauptsächlich für die Seegangsausbreitung im Flachwasser von Bedeutung sind, während sie für Wellen im freien Ozean keine große Rolle spielen.

Ich danke Herrn Prof. Klaus Hasselmann für viele hilfreiche Diskussionen.

Die numerischen Rechnungen wurden auf der PDP 10 des Rechenzentrums der Universität Kiel durchgeführt.

# Anhang

Koeffizienten  $V_{mn}$  aus Gl (3.12), S.21

$$\begin{aligned} V_{mn} = & 2g a_{m,\pm n} a_{m,\pm n}^* \\ & - 2 (\sigma_m k_m T_m A_m a_{\pm n} a_{m,\pm n}^* \pm \sigma_n k_n T_n A_n a_m a_{m,\pm n}^*) \\ & - (\sigma_m k_m^2 A_m a_m^* a_n a_n^* + \sigma_n k_n^2 A_n a_n^* a_m a_m^*) \\ & - 4 (\sigma_m \pm \sigma_n) A_{m,\pm n} a_{m,\pm n}^* \\ & - 2 (\sigma_m \pm \sigma_n) |\underline{k}_m \pm \underline{k}_n| \tanh |\underline{k}_m \pm \underline{k}_n| H A_{m,\pm n} a_m^* a_{\pm n}^* \\ & - 2 (k_m T_m k_n T_n \mp \underline{k}_m \cdot \underline{k}_n) A_m A_{\pm n} a_{m,\pm n}^* \\ & + 2 (k_m^3 T_m A_m A_m^* a_n a_n^* + k_n^3 T_n A_n A_n^* a_m a_m^*) \\ & \pm \underline{k}_m \cdot \underline{k}_n (k_m T_m + k_n T_n) A_m A_{\pm n} a_m^* a_{\pm n}^* \\ & + (k_m^2 k_n T_n + k_n^2 k_m T_m) A_m A_{\pm n} a_m^* a_{\pm n}^* \\ & + 2 (\underline{k}_m \pm \underline{k}_n) \cdot (\underline{k}_m A_m a_{\pm n} \pm \underline{k}_n A_{\pm n} a_m) A_{m,\pm n}^* \\ & + 2 |\underline{k}_m \pm \underline{k}_n| \tanh |\underline{k}_m \pm \underline{k}_n| H (k_n T_n a_m A_{\pm n} + k_m T_m A_m a_{\pm n}) A_{m,\pm n}^* \\ & + 2 |\underline{k}_m \pm \underline{k}_n| \tanh |\underline{k}_m \pm \underline{k}_n| H A_{m,\pm n} A_{m,\pm n}^* \\ & + \text{konj. kompl.} \end{aligned}$$

Koeffizienten  $B_{mn}$  und  $C_{mn}$  aus Gl. (3.30), S. 27

$$\begin{aligned}
 B_{mn} = & \frac{Z_n}{\sigma_n} \left\{ -(\sigma_m \pm \sigma_n)^2 P_{m,\pm n} - 2 \sigma_n^2 P_{m,\pm n} + D_{m,\pm n} P_{m,\pm n} \right. \\
 & + (E_{m,\pm n} \mp 2 \sigma_n P_{m,\pm n}) Q_{m,\pm n} \\
 & - \frac{\sigma_n}{k_n \bar{T}_n} \left[ \underline{k}_m \cdot \underline{k}_n \pm k_n^2 \left( 1 - \frac{4 \bar{T}_n}{Z_n} \right) \right] Q_{m,\pm n} \\
 & + 2 \frac{k_n^2 \bar{T}_n}{Z_n} \left( \frac{\tanh |\underline{k}_m \pm \underline{k}_n| H}{|\underline{k}_m \pm \underline{k}_n|} + \frac{H}{\cosh^2 |\underline{k}_m \pm \underline{k}_n| H} \right) Q_{m,\pm n}^2 \\
 & \left. + 2 \frac{\sigma_n^2 k_n}{Z_n} + 2 \frac{\sigma_n \sigma_m}{k_n \bar{T}_m} \underline{k}_n \cdot \underline{k}_m + \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_n^2 k_n}{\bar{T}_n} + \frac{\sigma_m^2 k_m}{\bar{T}_m} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{mn} = & 2 \left\{ \frac{\sigma_m}{\bar{T}_m} P_{m,\pm n} + \left( 1 \pm \frac{\sigma_n}{\sigma_m} \right) k_m Q_{m,\pm n} \right. \\
 & \left. + \frac{\sigma_n k_m}{g} \left( \frac{\tanh |\underline{k}_m \pm \underline{k}_n| H}{|\underline{k}_m \pm \underline{k}_n|} + \frac{H}{\cosh^2 |\underline{k}_m \pm \underline{k}_n| H} \right) Q_{m,\pm n}^2 \right\}
 \end{aligned}$$

## Literaturverzeichnis

- Barnett, T.P., C.H. Holland, Jr., and P. Yager (1969):  
A general technique for wind wave prediction,  
with application to the South China Sea.  
Final Report, Westinghouse Research Laboratories
- Barnett, T.P. and J.C. Wilkerson (1967): On the generation  
of ocean wind waves as inferred from air-  
borne radar measurements of fetch-limited  
spectra.  
J.Mar.Res. 25, 292-328
- Benjamin, T.B. & J.E. Feir (1967): The disintegration of  
wave trains on deep water.  
J.Fluid Mech. 27, 417-430
- Bisshop, F.E. (1969): Nonlinear wave propagation in the  
geometrical approximation.  
Techn.Rep.No.9, Brown University, Providence
- Bisshop, F.E. & R.B. Wilson (1968): Averaged stationarity  
principles.  
Techn.Rep.No.7, Brown University, Providence
- Bogoljubow, N.N. & J.A. Mitropolski (1965): Asymptotische  
Methoden in der Theorie der nichtlinearen  
Schwingungen.  
Akademie-Verlag, Berlin 442 pp.
- Bretherton, F.P. (1968): Propagation in slowly varying  
waveguides.  
Proc.Roy.Soc. A 302, 555-576
- Bretherton, F.P. & C.J.R. Garrett (1968): Wavetrains in  
inhomogeneous moving media.  
Proc.Roy.Soc. A 302, 529-554
- Collins, J.I. (1972): Prediction of Shallow-Water-Spectra.  
J. Geophys. Res. 77, 15, 2693-2707
- Crapper, G.D. (1972): Nonlinear gravity waves on steady  
non-uniform currents.  
J.Fluid Mech. 52, 4, 713-724
- Dewar, R.L. (1970): Interaction between hydromagnetic  
waves and a time-dependent inhomogeneous  
medium.  
Phys. Fluids 13, 11, 2710-2720

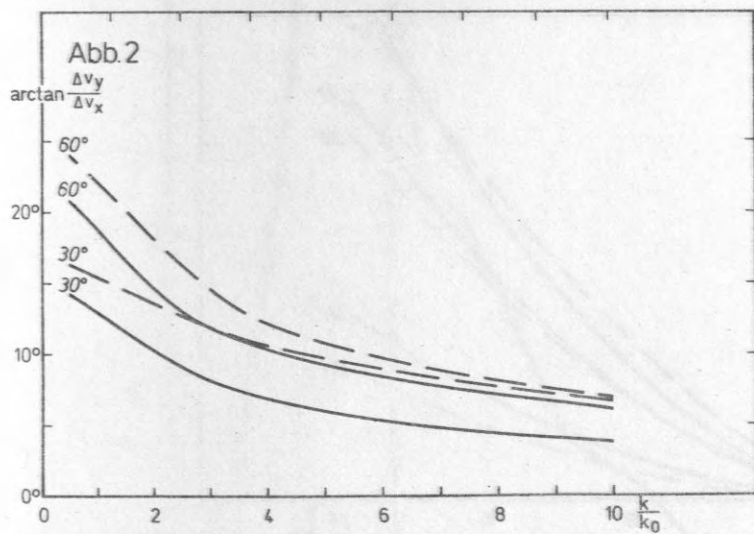
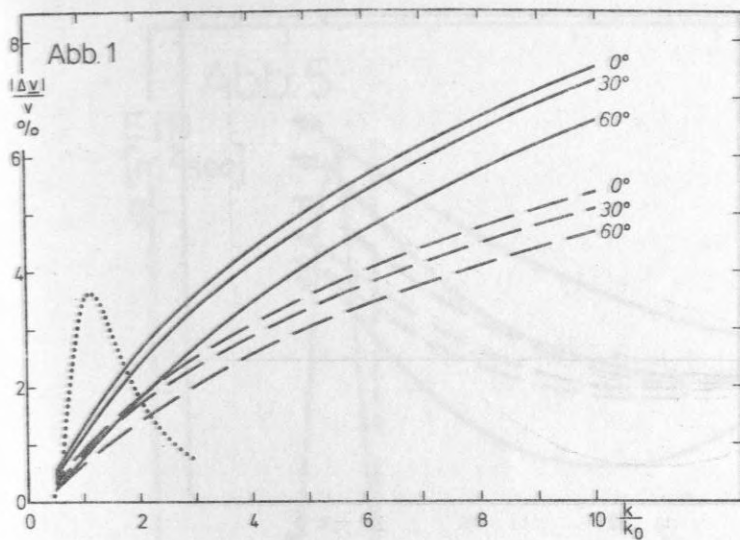
- Ewing, J.W. (1971): A numerical wave prediction method for the North Atlantic Ocean.  
Dt.Hydrogr.Z. 24, 241-261
- Hasselmann, K. (1962): On the non-linear energy transfer in a gravity wave spectrum. Part 1: General Theory.  
J.Fluid Mech. 12, 481-500
- Hasselmann, K. (1968): Weak interaction theory of ocean waves. Basic developments in fluid dynamics, Vol.2.  
Academic Press Inc., New York
- Hasselmann, K. (1970): Wave refraction in the presence of time-dependent currents and depths.  
Unveröffentlichtes Manuskript.
- Hasselmann, K. et al (1973): Measurements of wind-waves growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP) Dt.Hydrogr.Z.
- Hayes, W.D. (1970): Conservation of action and modal wave action.  
Proc.Roy.Soc. A 320, 187-208
- Kinsman, B. (1960): Surface waves at short fetches and low wind speeds - a field study.  
Vols. 1,2,3. Chesapeake Bay Institute,  
Tech.Rep.XIX, Ref. 60-1. 581 pp.
- Longuet-Higgins, M.S. & O.M. Phillips (1962): Phase velocity effects in tertiary wave interactions.  
J.Fluid Mech. 12, 333-336
- Longuet-Higgins, M.S. & R.W. Stewart (1961): The changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents.  
J.Fluid Mech. 10, 529-549
- - - - - (1962): Radiation stress and mass transport in gravity waves, with application to surf beats.  
J.Fluid Mech. 13, 481-504
- Luke, J.C. (1966): A perturbation method for nonlinear dispersive wave problems.  
Proc.Roy.Soc. A 292, 403-412
- Luke, J.C. (1967): A variational principle for a fluid with a free surface.  
J.Fluid Mech. 27, 395-397

- Miles, J.W. (1957): On the generation of surface waves by shear flows.  
J. Fluid Mech. 3, 185-204
- Phillips, O.M. (1957): On the generation of waves by turbulent wind.  
J. Fluid Mech. 2, 417-445
- Phillips, O.M. (1958): The equilibrium range in the spectrum of wind generated waves.  
J. Fluid Mech. 4, 426-434
- Pierson, W.J. & L. Moskowitz (1964): A proposed spectral form for fully developed wind seas based on the similarity theory of S.A. Kitaigorodskij.  
J. Geophys. Res. 69, 5181-5190
- Piest, J. (1968): Grundlage einer numerischen Seegangsvorhersage für Schelfmeere.  
Deutscher Wetterdienst, Seewetteramt.  
Einzelveröffentlichung Nr. 61
- Schrader, J.P. (1968): Kennzeichnende Seegangsgrößen für drei Meßpunkte in der Elbmündung.  
Hamburger Küstenforschung, Heft 4
- Simmons, W.F. (1969): A variational method for weak resonant wave interactions.  
Proc. Roy. Soc. A 309, 551-575
- Snyder, R.L. & C.S. Cox (1966): A field study of the wind generation of ocean waves.  
J. Mar. Res. 24, 141-178
- Tick, L.J. (1961): Nonlinear probability models of ocean waves.  
In: Ocean Wave Spectra, Prentice Hall,  
Englewood Cliffs, New Jersey
- Whitham, G.B. (1962): Mass, momentum and energy flux in water waves.  
J. Fluid Mech. 12, 135-147
- Whitham, G.B. (1965a): Nonlinear dispersive waves.  
Proc. Roy. Soc. A 283, 238-261
- Whitham, G.B. (1965b): A general approach to linear and nonlinear dispersive waves using a Lagrangian.  
J. Fluid Mech. 22, 273-283
- Whitham, G.B. (1967): Non-linear dispersion of water waves.  
J. Fluid Mech. 27, 399-412



## Erläuterungen zu den Abbildungen

- Abb.1: Tiefwasserbeispiel: Betrag der Gruppengeschwindigkeitsänderung in % des linearen Wertes als Funktion der Wellenzahl.  
Durchgehende Kurven:  $\cos^4$  - Richtungsverteilung, gestrichelt: Richtungsverteilung (6.4). Die punktierte Kurve stellt das skalare Pierson-Moskowitz-Spektrum dar.
- Abb.2: Tiefwasserbeispiel: Richtung der Gruppengeschwindigkeitsänderung in Winkelgraden. Durchgehend:  $\cos^4$  - Richtungsverteilung, gestrichelt: Richtungsverteilung (6.4).
- Abb.3: Tiefwasserbeispiel: Relative Änderung der Erhaltungsgröße in %. Durchgehend:  $\cos^4$  - Richtungsverteilung, gestrichelt: Richtungsverteilung (6.4).
- Abb.4: Tiefwasserbeispiel: Beiträge zum Integral in (5.20.2) für  $\cos^4$  - Richtungsverteilung. Durchgehend: 1. Summand, gestrichelt: Betrag des 2. Summanden.
- Abb.5: Flachwasser-Frequenzspektrum nach Schrader. Die gestrichelte Linie gibt die Frequenz an, bei der  $kH = 1$  ist.
- Abb.6: Betrag der Gruppengeschwindigkeitsänderung in % für Flachwasserbeispiel. Durchgehend: Änderung durch Wechselwirkungen der Wellen. Gestrichelt: Durch welleninduzierte mittlere Strömung.
- Abb.7: Beiträge zum Integral in (5.20.2) für Flachwasserbeispiel. Durchgehend: 1. Summand, gestrichelt: Betrag des 2. Summanden.



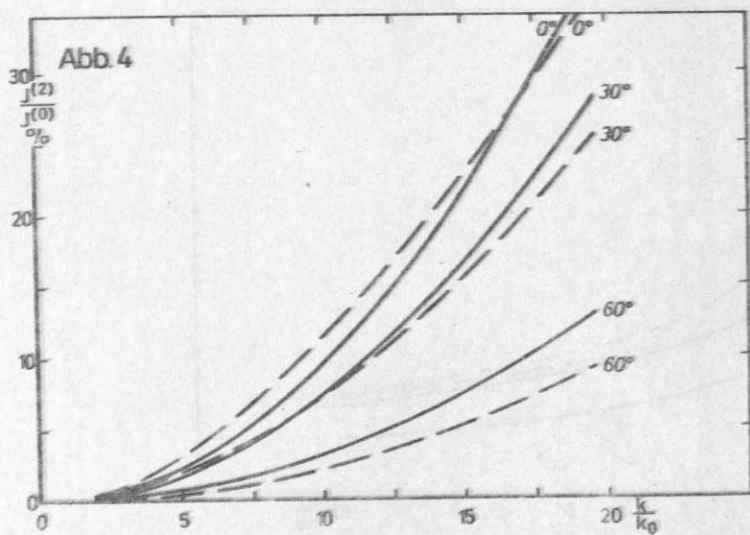
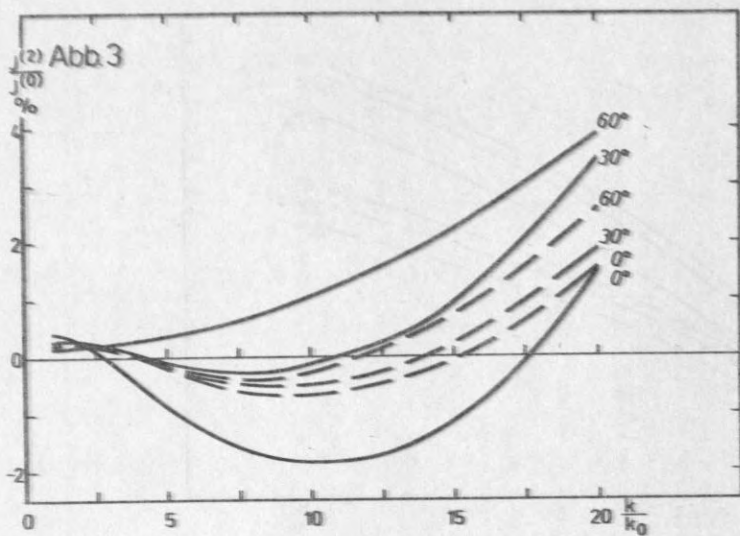
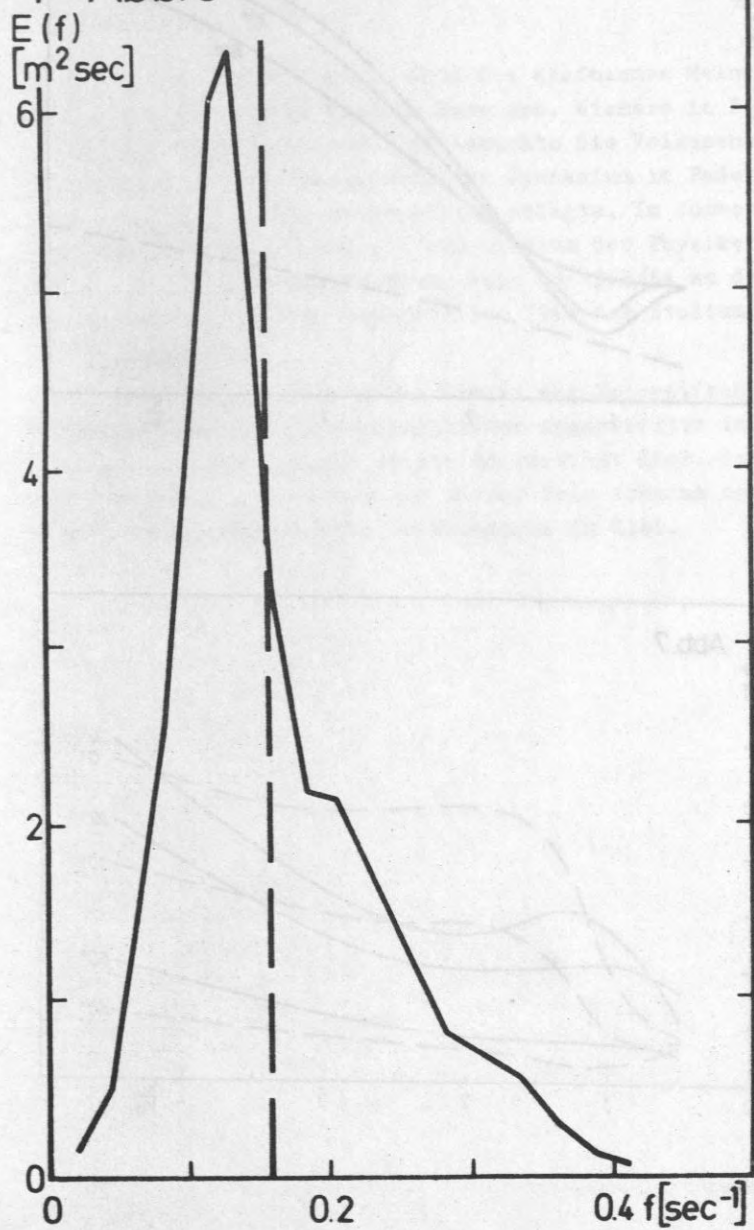
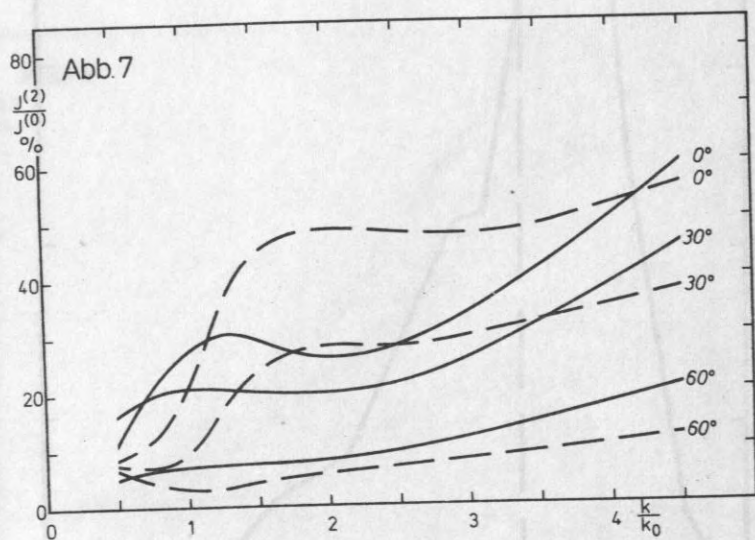
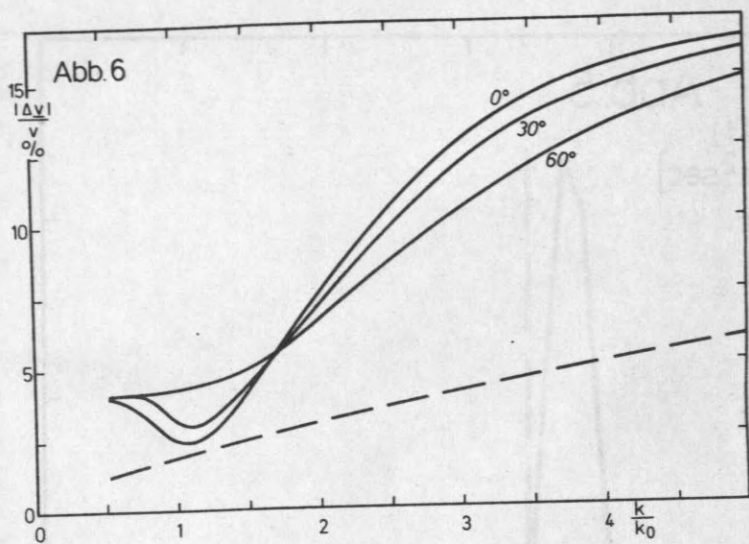


Abb. 5





## Lebenslauf

Am 27.10.1941 wurde ich als Sohn des Kaufmannes Heinrich Willebrand und seiner Ehefrau Rosa geb. Wiemers in Delbrück (Westfalen) geboren. Ich besuchte die Volksschule in Delbrück und das Neusprachliche Gymnasium in Paderborn, wo ich 1962 die Reifeprüfung ablegte. Im Sommersemester 1962 begann ich mit dem Studium der Physik; zunächst an der Universität Graz, seit WS 1963/64 an der Universität Kiel. Hier beendete ich 1968 das Studium mit der Diplomprüfung.

Seit 1969 arbeite ich auf dem Gebiet der Theoretischen Ozeanographie als wissenschaftlicher Angestellter im Institut für Meereskunde an der Universität Kiel. Ich bin verheiratet und wohne mit meiner Frau Johanna und unserer zweijährigen Tochter Franziska in Kiel.